

스텝다운 낙인형 주가연계증권의 수치 해석적 가치평가 : 1자산의 경우

A Numerical Valuation for Step-down Knock-In Equity Linked Security : 1 Stock case

< 요약문 >

본 논문은 스텝다운 조기상환형 주가연계증권의 가치 및 민감도 평가를 위한 새로운 방법론을 제시하고 있다. 기존 평가방법인 몬테칼로 시뮬레이션과 유한차분법은 이러한 유형이 가진 중요한 특성중의 하나인 낙인 효과를 과소평가하는 한계를 지닌 것에 반하여 제안모형은 이에 대한 엄밀한 수식을 정립하고 수치적분을 통하여 계산 정확성과 소요시간 단축 측면에서 분명한 개선 효과를 도출하고 있다. 본 연구의 범위는 1자산 한정이지만 모형 체계는 복수의 자산에 적용 가능하다.

김계홍

JURO Instruments 계량금융연구소 소장

[weareda@juroinstruments.com](mailto:weareda@juroinstruments.com)

## I 서론

주가연계증권(Equity Linked Security)은 증권의 이자 또는 상환금액이 특정 주가에 연동되어 지급되는 상품이며 주가 변동 리스크를 부담하는 조건으로 일반 채권 대비 다소 높은 수익을 제공하는 특징을 갖는다. 2020말 주가연계증권 시장은 37조원 규모이며 이중 90% 이상이 스텝다운 조기상환형 구조를 갖는다. 또한, 스텝다운 조기상환형 주가연계증권의 절반 가까이 1개 지수 연동형으로 나타나고 있다. 출시 이후 견고한 성장세를 보이던 주가연계증권 시장은 2018년 정점을 찍은 이후 그동안 잠재해오던 투자자 보호와 이에 따른 관련 당국의 규제 압박 그리고 헤징의 불안정성 등의 문제로 인하여 다소 주춤하는 모습을 보이고 있지만<sup>1)</sup> 상대적으로 채권 대비 고수익이라는 장점에 힘입어 지속적으로 발행이 이루어지며 투자자의 관심을 끌고 있다.

이러한 배경하에 현 시점에서 스텝다운 조기상환형 주가연계증권의 적정 가격과 고유 리스크에 대한 엄밀한 분석은 늦었지만 필요한 작업이라 판단된다. 기존에 자산평가사나 증권사 등에서 이 유형에 대한 평가 방법은 몬테칼로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation : MC) 또는 유한차분법(Finite Difference Method : FDM)을 적용하고 있다. 그러나, 이 두 방법은 이러한 유형이 가지고 있는 낙인(Knock-In) 특성을 과소평가하는 한계를 지니고 있다. 이 한계는 방법론에 특정된 것이므로 본 논문에서는 이러한 한계를 극복하기 위해 새로운 평가모형을 제시하고 그 성과를 기존 방법론과 비교분석한다. 제안 모형은 수치 적분(Numerical Integration)에 기반한 방법으로 가격 정확성과 민감도 안정성 그리고 계산시간 측면에서 기존 모형들의 성과 대비 현저히 우월한 장점을 가지고 있다. 몬테칼로 시뮬레이션은 복수의 기초자산 상품에 대하여 알고리즘 구현이 상대적으로 용이한 장점이 있지만, 가격과 민감도의 불안정성이 내재되어 있으며 시간이 상대적으로 많이 소요되는 단점을 지닌 방법이고, 유한차분법의 경우 민감도는 안정적이지만 3개 이상 기초자산의 경우 알고리즘 구현이 복잡하고 역시 시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 이러한 한계점을 극복하고자 준 닫힌 해(Semi Closed-form Solution)라는 이름으로 연구한 논문도 있지만, 이 유형이 가진 낙인 효과 반영을 위해 불가피하게 시뮬레이션을 사용하고 계산 시간의 단축 효과나 가격 정확도에서 의미 있는 진전이 크지 않은 방법론이 발표되어 왔다. 본 연구의 제안모형도 다변량 정규분포 계산을 위해 일부 시뮬레이션 기법을 이용하는 방법을 채택하고 있지만 해당 방법론은 전통적인 모든 시나리오를 실행한 후 경우의 수의 비중을 계산하는 방식이 아닌 모형이 내포하는 한계오차를 계산하여 특정 시나리오에 의한 결과값이 해당 오차 내에 있으면 계산을 종료하는 Rejection till Accept 방식이므로 시간 단축 효과가 두드러지게 나타나고 있다. 저자는 해당 방법 대신 직접 수치적분으로 다변량 정규분포를 계산해서 비교해 보았지만 그 결과가 소수점 13자리에서 6자리까지 동일한 결과가 도출되었고 또한 향후 복수의 기초자산 경우를 고려하여 구현 확장성이 보다 높은 Genz의 방법론을 사용하였다. 다변량 정규분포 외에 주가연계증권의 다른 성분을 평가하기 위한 방법론은 모두 수치 적분을 이용하고 있다. 이후 논의는 2장에서 제안 모형을 설명하고, 3장에서 분석 결과를 설명하다. 그리고, 마지막으로 4장에서 결론을 제시한다.

---

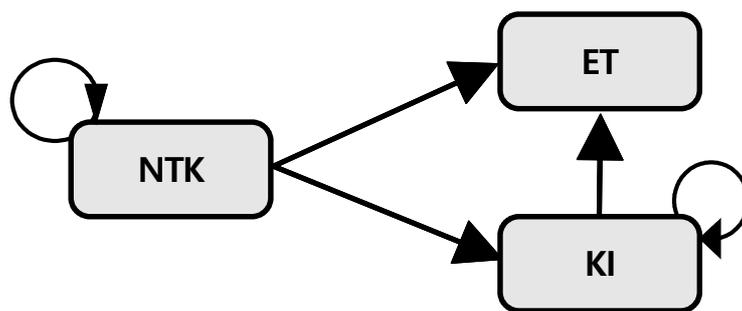
1) Jang(2020) 참조

## II 스텝다운 자동조기상환 ELS 평가모형

### II.1 StepDown AutoCall ELS

본 연구의 대상인 스텝다운 자동조기상환 ELS의 일반적 구조는 다음과 같다. 먼저, 해당 ELS에서 나타나는 상태(stages)는 3가지로 조기상환 및 낙인이 안된 상태(NTK)가 있고, 여기서 주가가 특정 조기상환 평가일( $t_i$ )에 조기상환 배리어를 상회할 경우 그에 따른 조기상환 일에 원금(1)과 이자( $c_i$ )를 상환하고 종료되는 조기상환(ET) 상태가 존재한다. 마지막으로 모든 조기상환 평가일에 조기상환이 이루어지지 않고 즉, 주가가 조기상환 배리어를 하회하고, 장중을 포함하여 계약 개시일 이후 주가가 낙인 배리어를 하회한 경험이 있으면 낙인(KI) 상태라 하는데 이 경우 만기 평가일에 조기상환 조건이 만족되지 못한다면 기준주가 대비 만기평가일 주가 비율로 줄어든 원금이 상환되므로 손실을 입게되는 구조를 갖는다. 단, 만기까지 NTK 상태가 지속될 가능성이 있는데 이 경우 상환 원리금은 마지막 조기상환 경우의 원리금과 동일한 값을 갖는 것이 일반적인 시장 관행이다. <그림 1>은 언급한 3가지 상태에 대하여 NTK로 시작하여 시간이 경과해도 해당 상태에 머물거나 ET에 도달하여 계약이 종료되거나 또는 주가가 하락하여 KI 상태로 들어갔다가 이후 주가가 상승할 경우 ET로 전이되거나 지속적으로 KI에 머무는 상태로 나타날 수 있음을 의미하고 있다. 요약하면, NTK는 해당 상태에 머물거나 ET 또는 KI로 전이 가능하고, KI는 KI에 머물거나 ET로 전이될 수 있다. ET 여부의 판단은  $N$  번 가능하고, KI 여부는 계약개시 이후부터 만기일까지 장중 주가의 낙인 배리어 하회 여부로 판단한다. 일반적으로 조기상환 배리어는 시간이 경과에 따라 직전 수준을 유지하거나 또는 그 아래 수준으로 설정되므로 스텝다운이란 이름을 갖게 되었다. 낙인 배리어는 마지막 조기상환 배리어보다 충분히 낮은 수준으로 설정되며 전 기간에 걸쳐 동일한 값으로 유지된다.

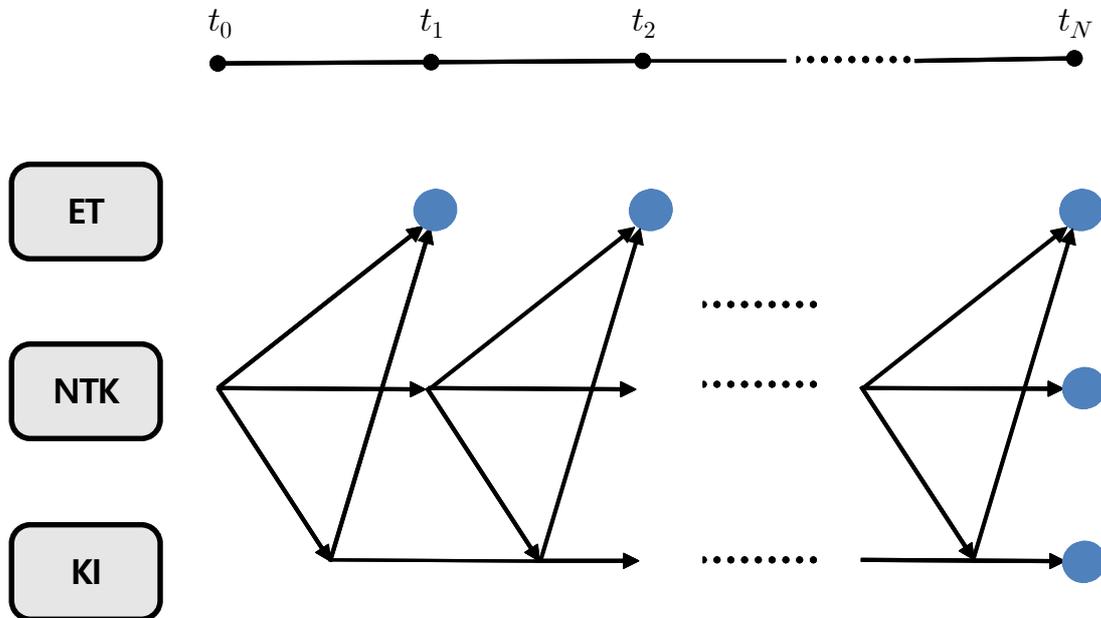
<그림 1> AutoCall ELS의 상태 전이도



이제 시간 흐름에 따른 상태 전이의 가능한 경로를 파악하기 위하여 <그림 2>를 살펴보자. <그림 2>에서 왼쪽 끝은 계약이 계약 개시일( $t_0$ )에 NTK로 시작함을 의미하고 이후 시간 경과에 따라 오른쪽으로 이동하며 상태 전이가 이루어지는 형태를 나타내고 있다. 먼저 조기상환의 경우 총  $N$  번의 기회가 존재하며  $i$  번째 조기상환은 그 직전  $i-1$  번째까지 조기상환 평가일 당시 주가가 조기상환 배리어에 하회하고  $i$  번째 평가일에 처음으로 주가가 조기상환 배리어를 상회할 경우 발생한다. 물론 각 평가일에 조기상환 조건이 만족되면

해당 이자와 원금을 지급하고 계약이 종료된다. 주지해야 할 사실은 조기상환 조건 평가가 특정일에 이루어진다는 점이다. 즉, 조기상환 평가일 직전 영업일 주가가 배리어를 상회하더라도 평가일에 하회하면 조기상환이 이루어지지 않는다. 한편, 그림에서 각 조기상환 상태에도달하는 화살표는 각 평가일마다 2개가 존재함을 알 수 있다. 즉, 조기상환은 NTK 상태 뿐만 아니라 KI 상태에서도 발생할 수 있음을 나타낸다. KI는 계약기간중(즉, 장중 주가 포함 전 기간) 주가가 KI 배리어를 하회한 경험이 있으면 발생하지만 이 상태에 있더라도 이후 평가일에 조기상환 조건을 만족하면 조기상환이 이루어지고 그렇지 않은 경우 만가에 원금 손실이 발생하게 된다. NTK 상태는 전 기간에 걸쳐 주가가 조기상환 배리어와 낙인 배리어 사이에 머물러서 ET와 KI 조건을 만족하지 않을 경우 발생한다. 월지급식이 아닌 일반적인 스텝다운 자동조기상환형 ELS에서 각 상태 전이 경로의 끝점 즉, 원리금 현금흐름 발생후 계약이 종료되는 점은  $N$  개의 조기상환점( $ET_1, ET_2, \dots, ET_N$ ), 만기 NTK 및 KI( $NTK_N, KI_N$ )로 총  $N+2$  개 점이 존재한다.

<그림 2> AutoCall ELS의 시간 흐름에 따른 상태 전이도



## II.2 평가모형

$t$ 시점 ELS의 가격을  $V_t$  라 하고 잔존 조기상환 평가일이  $N$  개 이면 평가 가격식은 다음과 같이 표현된다.

$$V_t = \sum_{i=1}^N e^{-r(t_i-t)} E^Q[1_{\{ET_i\}}](1+c_i) + e^{-r(T-t)} \left( E^Q[1_{\{NTK_N\}}](1+c_N) + E^Q \left[ 1_{\{KT_N\}} \frac{S_T}{S_B} \right] \right) \quad (1)$$

(1)식에서  $r$  은 무위험 이자율,  $E^Q$  는 무위험금리상품이 뉴머레어인 위험중립확률측도(Risk Neutral Measure) 하 기댓값 연산자,  $1_{\{\bullet\}}$  는 집합기호 내 조건이 만족되면 1이고 미충족시 0의 값을 갖는 지시함수(index function),  $T=t_N$ ,  $S_T$  는 만기평가일 주가,  $S_B$  는 기준주가를 의미한다. 위 식에서 유일한 확률변수인 주가의 움직임은  $Q$  측도에서 다음 식을 따른다.

$$S_{t+\Delta} = S_t e^{(r-\sigma^2/2)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_{t+\Delta}} \quad (2)$$

위 식에서  $\Delta$  는 경과기간,  $\sigma$  는 주가 수익률의 변동성,  $\epsilon$  은 표준정규분포를 따르는 확률변수이다. (1)식 우변의 첫 번째 기댓값 연산자 항은 ET 상태의 기댓값을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$E^Q[1_{\{ET_i\}}] = P^Q[ET_i] = P^Q \left[ \bigcap_{j=1}^{i-1} \{S_j < B_j\}, S_i \geq B_i \right] \quad (3)$$

위 식에서  $B_i$  는  $i$  조기상환 평가일에 적용되는 조기상환 배리어를 의미한다. (3)식의 계산을 위해 본 연구에서 채택한 다변량 정규분포 수치적분 방법은 다음 절에서 설명한다. 다음으로 (1)식 우변의 두 번째 기댓값 항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E^Q[1_{\{NTK_N\}}] = P^Q[NTK_N] = P^Q \left[ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\}, \min_{\tau \in (t_0, T)} S_\tau > LB \right] \quad (4)$$

위 식에서  $LB$  는 장중 포함 전기간에 적용되는 낙인 배리어를 의미하는데 (4)식은 주가가 매 조기상환 평가일에 조기상환 배리어보다 작고 전기간에 걸쳐 낙인 배리어보다 높은 경우의 확률을 의미한다. 여기서, 표기의 편의성을 위해  $\{\min_{\tau \in (t_0, T)} S_\tau > LB\} \Leftrightarrow \{\tau_{LB} > T\}$  로 표시하면 (4)식은 다음과 같이 변환된다.

$$P^Q \left[ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\}, \tau_{LB} > T \right] = P^Q [x_1 < B'_1, \tau_{LB'} > t_1] \quad (5)$$

$$\times \prod_{i=2}^N P^Q [x_i < B'_i, \tau_{LB'} > t_i | LB' < x_{i-1} < B'_{i-1}]$$

여기서,  $x$  는  $S$  또는  $\ln S$  를 나타내며, ' 은  $x$  에 따라 변환되는 경계를 나타낸다. (5)식은 미조기상환과 미낙인의 결합확률이 기간별 미조기상환 및 미낙인 조건부확률의 곱으로 표현됨을 나타내고 있다. 이 식은 브라운 운동의 강 마코프(strong Markov) 및 도달시간(Hitting time) 특성을 이용하면 비교적 손쉽게 유도된다. 우변의 첫 번째 항은 이미 널리 잘 알려진

확률로써, 고려기간 내 즉,  $(t_0, t_1)$ ,  $x$  가 낙인 배리어( $LB'$ ) 에 도달하지 못할(또는 낙인 배리어 초과상태를 유지할) 사건과 마지막 시점( $t_1$ )  $x_1$  의 결합확률을 나타내며 이 확률은 브라운 운동의 반사원리(reflection principle)를 이용하여 도출된다<sup>2)</sup>.  $x_1$  은  $x_0$  가 주어진 상태에서 조건부 전이확률 형태로 나타나는데 일반적으로  $x_0$  가 상수이므로 그 표현을  $x_1$  에 대한 무조건부 확률처럼 표시한다. 하지만,  $x_{i-1}$  에서  $x_i$  로 전이되는 경우  $x_{i-1}$  또한 변수이므로 두 번째 확률은 전이확률과  $x_{i-1}$  의 확률밀도함수(probability density function)의 곱으로 표시된다. 이 확률을 계산하기 위한 식은 다음과 같다.

$$P^Q[x_i < B'_i, \tau_{LB'} > t_i | LB' < x_{i-1} < B'_{i-1}] = \frac{\iint_{LB'}^{B'_i} \psi(x_i | x_{i-1}) \phi(x_{i-1}) dx_i dx_{i-1}}{\int_{LB'}^{B'_i} \phi(x_{i-1}) dx_{i-1}}$$

(6)

위 식에서  $\psi(\cdot)$  는 (5)식 우변의 첫 번째 항을 계산하는 함수와 동일하며  $\phi(\cdot)$  는 확률밀도함수(Probability Density Function)를 의미한다.

여기서 미낙인 확률의 배경에 대한 이해가 필요하다. 이 확률은 전통적인 확률론 분야에서도 도달시간(hitting time) 확률로 연구되는 주제이다. 현재까지 1변량과 2변량인 경우 각각 Black and Cox(1976)와 He et al.(1998) 등이 계산식을 발표하였고, 3변량 이상인 경우는 정확한 산식이 발표되지 않은 상황이다. 현재 자동조기상환 ELS를 취급하는 금융기관이나 평가 결과 제공이 주업무인 4개 자산평가사들이 이 유형 종목을 평가할 때 몬테칼로법 또는 유한차분법(Finite Difference Method: FDM)을 사용하는 이유 중의 하나가 이 도달시간 확률 계산문제 때문이다. 낙인 조건은 계약기간 동안 일별 증가가 아닌 장중에 거래된 모든 가격의 낙인 배리어 도달 여부를 고려하는데 몬테칼로법이나 FDM으로 계산하면 계산시간 과다 문제로 일별, 월별, 조기상환 평가일별을 선택하여 근사적으로 도달시간 확률을 계산하고 있다. 이 점에서 정확하면서도 신속하게 계산이 가능한 산출 공식을 연구하는 의의가 있다.

마지막으로 (1)식의 세 번째 기댓값 항은 두 확률적 사건의 결합 형태로 표시되어 있는데 이 부분은 전통적인 뉴머레어(Numeraire) 변환을 적용하여 다음과 같이 용이한 형태로 변환하여 계산한다.

$$\begin{aligned} E^Q \left[ 1_{\{KI_N\}} \frac{S_T}{S_B} \right] &= E^Q \left[ 1_{\left\{ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\}, m_\tau \leq LB \right\}} \frac{S_T}{S_B} \right] \\ &= \frac{S_t}{S_B} P^{Q^s} \left[ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\}, m_\tau \leq LB \right] \\ &= \frac{S_t}{S_B} \left( P^{Q^s} \left[ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\} \right] - P^{Q^s} \left[ \bigcap_{j=1}^N \{S_j < B_j\}, m_\tau > LB \right] \right) \end{aligned}$$

(7)

2) Karatzas and Shreve(1998), Klebaner(2012) 참조

위 식에서  $Q^S$  는 주가가 뉴머레어일 경우 위험중립측도를 나타낸다. (7)식 우변 세 번째 줄의 첫 번째 항은  $Q^S$  확률측도 하 다변량 정규분포를 적용하여 계산하고 두 번째 항은 마찬가지로  $Q^S$  확률측도 하에서 (5)식과 같이 분해하여 각각 계산한다.

요약하면, 스텝다운 자동조기상환 ELS의 값은 (3)식, (5)식, (7)식을 계산하고 이를 (1)식에 대입하여 계산된다. 단, (5)식은 도달시간 확률 계산식인 (6)식의 계산이 선행되어야 하고, 나머지 다른 확률들은 모두 다변량 정규분포를 이용하여 계산된다. 만일, 계산 대상인 ELS가 낙인 조건이 없다면 관련 식 (5)와 (7)에서 도달시간 부분이 제외된 형태로 다변량 정규분포를 이용하여 계산이 가능하며 이 경우 기초자산 주가가 2개 이상이어도 동일한 논리가 적용된다. 추가적으로 언급할 사실은 이 유형 상품에서 조기상환 평가시 평가가격을 영업일 3일 종가의 평균으로 결정되는 경우가 있는데 이러한 경우 테일러 1차 근사식을 적용하여 해당 확률 계산이 가능하다.

### II.3 다변량 정규분포의 수치적 계산

다변량 정규분포의 확률값을 계산하기 위하여 Genz(1992) 가 제시한 방법은 다음과 같다. 먼저, 계산 대상인 목적함수 즉,  $N$ 변량 누적정규분포 함수는 아래 (8)식과 같다.

$$F(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|(2\pi)^N}} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_N}^{b_N} e^{-\frac{1}{2}\theta^t \Sigma^{-1} \theta} d\theta \quad (8)$$

위 식에서  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)^t$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^t$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)^t$ ,  $\Sigma$  는  $N \times N$  공분산 행렬이고  $t$  는 행렬 또는 벡터의 전치(transpose)를 의미한다. 위 식에 직접 수치적분을 적용하는 것은 매우 번거롭고 계산 시간도 많이 소요되는데 이를 해결하기 위하여 Genz는 세 번의 변수 변환을 도입하였다. 첫 번째 변환은 공분산 행렬을 출레스키 분해하여 변수를 분리시키는 방식이다. 공분산 행렬의 하삼각 출레스키 행렬을  $C$  (즉,  $\Sigma = CC^t$ )라 할 때  $\theta = Cy$ 로 변환하면  $y$  는 서로 독립인 확률변수가 된다( $\because \theta^t \Sigma^{-1} \theta = y^t C^t (C^t)^{-1} C^{-1} Cy = y^t y$ ). (8)식을  $y$  로 표시하면 다음과 같이 나타낸다.

$$F(a,b) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{a'_1}^{b'_1} e^{-\frac{y_1}{2}} \int_{a'_2(y_1)}^{b'_2(y_1)} e^{-\frac{y_2}{2}} \dots \int_{a'_N(y_1, y_2, \dots, y_{N-1})}^{b'_N(y_1, y_2, \dots, y_{N-1})} e^{-\frac{y_N}{2}} dy \quad (9)$$

여기서  $a'_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}) = \left( a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} y_j \right) / c_{ii}$ ,  $b'_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}) = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} y_j \right) / c_{ii}$

(9)식의 각 적분함수는 일변량 누적정규분포를 이용하여 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$F(a,b) = \int_{d_1}^{e_1} \int_{d_2(z_1)}^{e_2(z_1)} \dots \int_{d_N(z_1, z_2, \dots, z_{N-1})}^{e_N(z_1, z_2, \dots, z_{N-1})} dz \quad (10)$$

$$\text{여기서 } d_i(z_1 : z_{i-1}) = N\left(\left(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(z_j)\right) / c_{ii}\right), \quad e_i(z_1 : z_{i-1}) = N\left(\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(z_j)\right) / c_{ii}\right)$$

$$z_i = N(y_i), \quad (z_1 : z_{i-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1})$$

(10)식은 식이 간소하게 표현되었지만 적분구간이 다소 복잡해지므로써 아직 수치 적분 알고리즘을 그대로 적용하기 어려운 형태이다. 이를 해결하기 위하여  $z_i = d_i + w_i(e_i - d_i)$ 로 변환하여 다시 정리하면 다음 (11)식으로 나타난다.

$$F(a, b) = (e_1 - d_1) \int_0^1 (e_2 - d_2) \cdots \int_0^1 (e_N - d_N) \int_0^1 dw \quad (11)$$

$$\text{여기서 } d_i(w_1 : w_{i-1}) = N\left(\left(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j))\right) / c_{ii}\right),$$

$$e_i(w_1 : w_{i-1}) = N\left(\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N^{-1}(d_j + w_j(e_j - d_j))\right) / c_{ii}\right)$$

(11)식은  $w_i$  가 주어지면 축차적으로 원래의 목적하는 다변량 누적정규분포 확률값을 계산할 수 있음을 나타낸다. Genz(1992)는  $w_i$  에 대한 일양분포난수(uniform random number)를 생성하고 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 (11)식을 계산하는 단계를 제시하고 있다. 보다 자세한 시뮬레이션 접근법은 Genz(1992)를 참조하여 파악이 가능하다. 다행스럽게도 강력한 프로그래밍 언어인 R에 해당 기능을 함수로 제공하고 있다. 본 연구의 가격계산 알고리즘이 R을 기반으로 작성된 바 다변량 정규분포 확률값 함수로 R이 제공하는 `pmvnorm()`을 사용하였다. 한편, 계산시간이 매우 중요한 문제인데 몇가지 프로그래밍 언어에 대한 계산시간을 비교해보면 일반적인 시뮬레이션 계산 시간은 경험적으로 FORTRAN <= C, C++ < JAVA << R < Python 순으로 나타나고 있으며 특히 스텝다운 낙인 ELS의 가격 계산시 JAVA의 경우 R 대비 1/10 정도로 시간이 감소하는 것으로 나타나고 있다.

### III 분석결과

#### III.1 몬테칼로 시뮬레이션 방법

이 절에서는 본 연구에서 비교 대상으로 설정한 스텝다운 조기상환 ELS의 가치평가를 위한 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 설명한다. 몬테칼로 평가방법의 세부 절차는 다음과 같다.

- ① 상품정보 및 시장정보 입수
- ② 주가 기간벡터 생성(낙인일 경우 1일 단위, 토요일 일요일 제외)
- ③ 기간벡터내 조기상환일 인덱스 생성
- ④ 현금흐름 발생일 기간벡터 및 할인함수 벡터 생성
- ⑤ 주가 기간벡터에 대한 난수 및 주가 동학을 이용한 주가생성(Milstein scheme 적용)
- ⑥ 주가 시나리오별로 조기상환 평가일 조기상환 여부 평가(해당일 주가와 해당 회차 조기상환 배리어 비교)
- ⑦ 미조기상환 시나리오 대상으로 낙인 여부 평가(각 시나리오 별 최소값 파악후 낙인 배리어와 비교하여 결정)
- ⑧ 각 시나리오별 조기상환/낙인/노낙인 여부에 따라 상환금액 매칭
- ⑨ 각 시나리오별 상환금액에 해당 일자 할인함수를 곱한 후 전체 시나리오의 할인된 상환금액의 단순 평균 계산

#### III.2 계산결과 비교분석

계산 대상 스텝다운 조기상환 ELS의 발행 및 시장정보는 다음과 같이 설정하였다.

- 만기( $T$ ) : 3년
- 명목금액 : 1원
- 주식수 : 1종목
- 주식 시초 및 기준 가격( $S_0 = S_B$ ) : 100
- 무위험금리( $r$ ) : 3%
- 주식수익률 변동성( $\sigma$ ) : 20%
- 조기상환평가 : 6개월 단위 6회
- 조기상환 배리어( $B_i$ ) : 90 90 85 85 80 80
- 낙인 배리어( $LB$ ) : 55
- 조기상환 수익률( $c_i$ ) : 3.5% 7% 10.5% 14% 17.5% 21% 21%

위 정보에서 조기상환 수익률이 7개인 이유는 각각 조기상환 조건과 낙인 조건을 만족하지 못한 경우(NTK)의 수익률을 최종 조기상환시 수익률과 일치시켰음을 의미하기 때문이다. 모든 계산은 CPU가 Intel i5-8265U 1.6GHz 인 노트북을 사용하여 이루어졌다. 이러한 컴퓨터 사양하에서 몬테칼로 시뮬레이션을 시행할 경우 3년 동안 주말을 제외한 일별 주가의 가능

한 최대 시나리오수는 400,000개이며 총 3억1,200만개(=3\*260\*400000)의 난수 생성을 의미한다.

다음의 [표 1]은 주어진 상품을 각각 몬테칼로 시뮬레이션(MC)과 본 연구에서 제안한 모형(Formula)으로 가격, 각 상태별 위험중립측도하 발생 확률 그리고 초단위 계산소요시간(Calc. Time)을 나타내고 있다. 제안모형의 성과는 우선 시뮬레이션 가격 대비 20bp 낮게 나타나고 있는데 이는 시뮬레이션에서 고려하지 못한 낙인 확률을 반영하기 때문인 것으로 판단된다. 즉, 노낙인(NTK)과 낙인(KI) 확률이 각각 제안모형의 경우 상대적으로 50bp 정도 차이 나는 것이 이를 나타낸다고 볼 수 있다. 조기상환 확률의 경우 첫 번째 조기상환 확률이 약 10bp 차이이고 그 이후로는 3bp 밀므로 제안모형과 시뮬레이션 결과가 유사하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 이 것은 조기상환은 낙인과 무관하게 우선적으로 결정되기 때문인 것으로 판단된다. 계산 소요시간의 경우 시뮬레이션은 2.68초에서 831.57초로 나타나고 있고 제안모형의 경우 0.21초로 월등하게 나타나고 있다. 물론 R이 아닌 JAVA나 C 또는 C++ 을 사용할 경우 약 1/10 정도로 시간이 감소하기는 하지만 제안모형의 경우도 같이 줄어들게 되므로 상대적인 우열은 유지된다.

[표 1] 스텝다운 조기상환 ELS 평가 결과

Normal	Scenario	Value	Probability								Calc. Time
			ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	NTK	KI	
MC	10,000	1.011165	78.21%	6.49%	4.48%	1.74%	1.97%	1.07%	2.89%	3.150%	2.68
	30,000	1.010716	78.05%	6.72%	4.55%	1.89%	1.96%	0.98%	2.60%	3.247%	7.80
	50,000	1.010572	78.32%	6.73%	4.56%	1.85%	1.98%	0.88%	2.44%	3.242%	11.78
	100,000	1.010025	78.28%	6.88%	4.48%	1.85%	1.86%	0.90%	2.42%	3.333%	33.78
	250,000	1.010162	78.19%	6.81%	4.58%	1.83%	1.82%	0.91%	2.53%	3.328%	244.88
	400,000	1.010094	78.26%	6.90%	4.61%	1.82%	1.80%	0.86%	2.44%	3.321%	831.57
Formula	-	<b>1.008047</b>	<b>78.16%</b>	<b>6.90%</b>	<b>4.61%</b>	<b>1.82%</b>	<b>1.83%</b>	<b>0.88%</b>	<b>1.92%</b>	<b>3.886%</b>	<b>0.21</b>

다음으로 민감도 계산결과를 살펴보면 [표 2.1]에서 [표 2.3]은 각각 금리, 주가, 변동성 충격에 따른 가격 민감도를 비교한 결과이다. 제안모형의 경우 시뮬레이션 시나리오 400000의 결과와 비교적 유사하지만 시나리오 수에 따라 민감도가 다소 변동하는 형태로 나타남을 알 수 있다. 현업에서는 주가연계증권의 헤징이나 FRTB BASEL III 기준에 맞춘 리스크 계산을 위해 보유 주가연계증권의 민감도를 반드시 계산해야 하는데 시간과 자원의 문제로 시뮬레이션 횟수를 5만개 아래로 설정하여 계산하는 것이 일반적이다. 이 경우 생성된 민감도 결과는 매우 변동적이므로 리스크 또는 헤징에 문제점이 발생하게 될 소지가 있다.

[표 2.1] 금리 1BP 상향시 평가 결과

r+1BP	Scenario	Value	Probability								PV01
			ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	NTK	KI	
MC	10,000	1.011185	78.22%	6.52%	4.47%	1.74%	1.96%	1.06%	2.90%	3.130%	0.20
	30,000	1.010648	78.05%	6.73%	4.56%	1.90%	1.96%	0.98%	2.59%	3.243%	-0.68
	50,000	1.010490	78.33%	6.73%	4.56%	1.85%	1.98%	0.88%	2.43%	3.242%	-0.82
	100,000	1.009995	78.29%	6.89%	4.48%	1.85%	1.86%	0.90%	2.42%	3.323%	-0.30
	250,000	1.010107	78.20%	6.81%	4.58%	1.82%	1.81%	0.91%	2.53%	3.323%	-0.55
	400,000	1.010036	78.27%	6.89%	4.61%	1.83%	1.80%	0.85%	2.43%	3.317%	-0.58
Formula	-	<b>1.007994</b>	<b>78.17%</b>	<b>6.90%</b>	<b>4.61%</b>	<b>1.82%</b>	<b>1.83%</b>	<b>0.87%</b>	<b>1.92%</b>	<b>3.880%</b>	<b>-0.53</b>

[표 2.2] 기초자산 가격 1% 상향시 평가 결과

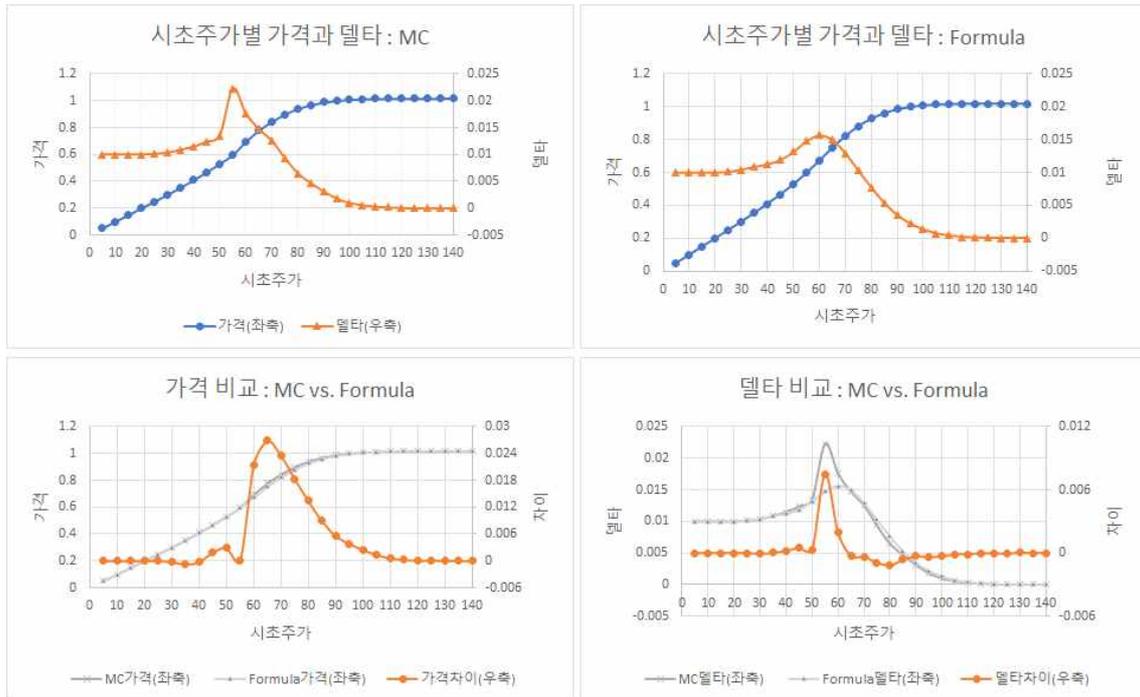
Sx101%	Scenario	Value	Probability								DELTA
			ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	NTK	KI	
MC	10,000	1.011797	80.48%	5.98%	3.98%	1.58%	1.74%	0.95%	2.45%	2.840%	0.06
	30,000	1.011767	80.00%	6.18%	4.22%	1.76%	1.77%	0.85%	2.33%	2.893%	0.11
	50,000	1.011572	80.43%	6.17%	4.12%	1.60%	1.82%	0.80%	2.17%	2.892%	0.10
	100,000	1.011187	80.25%	6.31%	4.08%	1.67%	1.68%	0.83%	2.23%	2.970%	0.12
	250,000	1.011382	80.17%	6.28%	4.19%	1.66%	1.64%	0.82%	2.28%	2.946%	0.12
	400,000	1.011188	80.21%	6.36%	4.21%	1.67%	1.64%	0.75%	2.20%	2.967%	0.11
Formula	-	<b>1.009353</b>	<b>80.17%</b>	<b>6.35%</b>	<b>4.19%</b>	<b>1.65%</b>	<b>1.65%</b>	<b>0.79%</b>	<b>1.73%</b>	<b>3.478%</b>	<b>0.13</b>

[표 2.3] 기초자산 변동성 1% 상향시 평가 결과

$\sigma+1\%$	Scenario	Value	Probability								VEGA
			ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	NTK	KI	
MC	10,000	1.006649	76.96%	6.80%	4.48%	1.89%	2.02%	1.26%	2.56%	4.030%	-0.45
	30,000	1.006819	76.75%	7.05%	4.64%	2.02%	2.04%	1.00%	2.49%	4.013%	-0.39
	50,000	1.006849	76.98%	7.00%	4.71%	1.93%	2.10%	0.91%	2.40%	3.982%	-0.37
	100,000	1.006230	76.98%	7.14%	4.65%	1.98%	1.93%	0.94%	2.31%	4.075%	-0.38
	250,000	1.006396	76.92%	7.11%	4.73%	1.92%	1.88%	0.97%	2.42%	4.056%	-0.38
	400,000	1.006264	76.93%	7.17%	4.76%	1.92%	1.89%	0.92%	2.34%	4.071%	-0.38
Formula	-	<b>1.004346</b>	<b>76.84%</b>	<b>7.18%</b>	<b>4.76%</b>	<b>1.93%</b>	<b>1.91%</b>	<b>0.93%</b>	<b>1.86%</b>	<b>4.591%</b>	<b>-0.37</b>

시뮬레이션의 민감도 변동을 확인하기 위하여 다음으로 기초자산 시초가격별 ELS 가격과 델타 계산결과를 다음의 <그림 3>에 제시하였다.

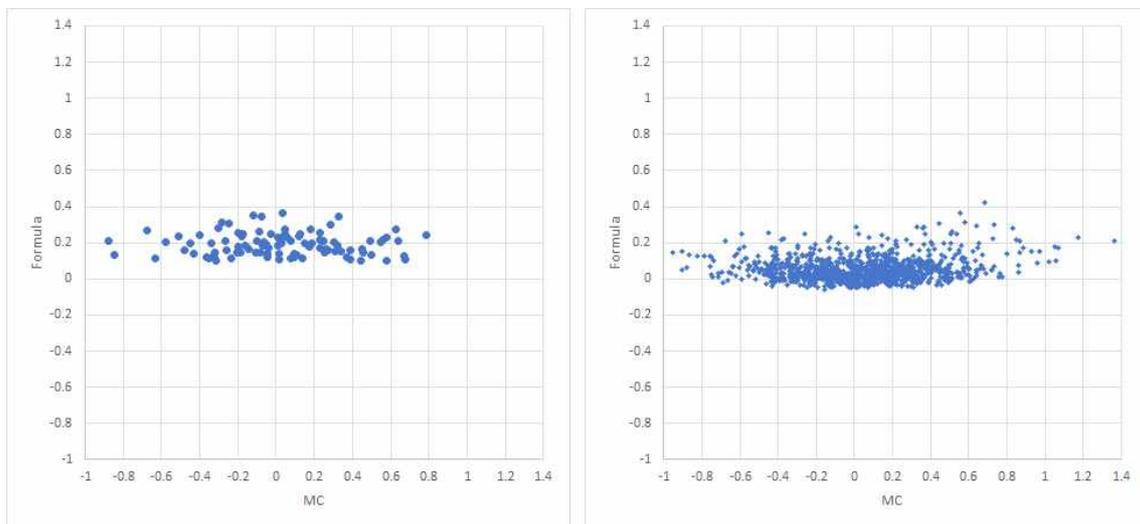
<그림 3> 두 모형간 가격과 델타 비교



<그림 3>의 상단 2개 그림은 각각 시뮬레이션과 제안모형의 가격과 델타를 나타내고 있다. 두 모형의 가격은 유사하게 보이지만, 시뮬레이션 델타의 경우 낙인 배리어 근방에서 다소 불안정한 모습을 나타내고 있고 제안모형의 경우 부드러운 곡선 형태로 나타남을 알 수 있다. 두 모형에서 나타나는 델타의 특징은 다음과 같이 해석이 가능하다. 먼저, 주가가 매우 낮을 경우 낙인 발생확률이 높고 상환금액이 만기주가의 기준가격 대비 수익률에 연동되므로 주가가 증가할 경우 그 비율 그대로 상환금액이 늘어나게 된다. 따라서 낮은 주가 수준의 델타가 0.6 근방에서 수평으로 나타나는 것으로 파악이 된다. 주가가 높은 경우, 조기상환 확률이 높기 때문에 약속된 고정 이자를 지급하고 종료하게 된다. 이 경우 일정 주가 수준 이상에서는 아무리 주가가 증가해도 상환금액이 증가하지 않기 때문에 델타가 0으로 나타나게 된다. 이러한 특징은 두 모형의 결과에서 공통적으로 나타나지만, 중간 주가 수준 즉, 낙인 배리어 근방에서는 시뮬레이션 결과가 변동이 있게 나타나고 있는데 이 것은 일반적으로 시뮬레이션의 경우 특정 경계면을 기준으로 그 이상과 미만을 구분하는데에는 탁월한 성능을 나타내지만 스텝다운 주가연계증권과 같이 낙인 여부를 구분하고 낙인시 마지막 주가의 수익률을 파악해야 하는 경우 개별 만기시점 주가의 자유도는 필연적으로 적어지기 때문에 다소 변동적으로 나타나는 것으로 이해가 된다. <그림 3>의 하단 2개 그림은 각각 두 모형의 가격차이와 델타 차이를 나타내는 것으로 시초주가의 양 끝단 부분은 서로 유사하게 나타나지만 낙인 배리어 근방과 낙인이 영향을 미치는 주가 수준에서 차이가 나타남을 알 수 있다.

마지막으로 언급할 결과는 두 모형에 따른 헤지 성과 비교이다. <그림 4>는 매 1일 단위 10일간의 주가 시나리오를 각각 100개와 1,000개를 생성하여 각 시나리오 별로 주가와 채권으로 복제 포트폴리오를 구성한 델타 헤징 손익의 산점도이다. 두 모형에 적용한 주가 시나리오는 동일하며 각 점은 가로축이 시뮬레이션 손익이고 세로축이 제안모형의 손익이다. 그림에서 시뮬레이션에 따른 델타 헤징의 손익 변동성이 상대적으로 크게 나타나고 제안모형의 경우 변동폭이 상대적으로 작음을 알 수 있다.

<그림 4> 두 모형간 델타 헤징 성과 비교



[표 3] 헤지 손익 시나리오의 기초 통계량

100개	Mean	SD	MEAN/SD	Min	Max	Skew	Kurt
MC	5.20%	36.27%	0.14	-88.64%	139.83%	0.25	1.39
Formula	5.31%	6.27%	0.85	-3.93%	22.24%	0.55	-0.41
1,000개	Mean	SD	MEAN/SD	Min	Max	Skew	Kurt
MC	4.38%	34.09%	0.13	-119.60%	136.27%	0.02	0.39
Formula	5.34%	6.52%	0.82	-5.64%	42.16%	1.35	2.73

이러한 성과 차이의 근본적 원인은 시뮬레이션 델타 민감도의 내재적 불안정성에 기인하는 것으로 파악되므로 추가연계증권의 엄밀한 리스크 분석 및 헤징을 위해 오로지 시뮬레이션 결과에 의존하는 것은 바람직하지 않은 것으로 판단된다.

#### IV 결론

이 논문은 스텝다운 낙인형 1개 추가연계증권의 가치평가를 위한 해석해 모형과 그 성과를 제시하고 있다. 이 논문에서 기존 문헌 대비 특별한 기여 점은 다음과 같다. 먼저, 기간별 조기상환 확률 계산을 위한 다변량 정규분포를 도입하여 시뮬레이션이나 유한차분법과 같은 근사적 방법이 아닌 확률분포를 직접적으로 계산하는 방식을 채택한 점이다. 두 번째는 기간별 도달시간 확률을 축차적으로 적용하여 전체기간에 대한 도달시간 확률 계산 방법을 제시한 점이다. 해당 방법은 기초자산의 수가 증가하여도 동일하게 적용이 가능할 것으로 기대된다. 세 번째는 기존 시뮬레이션 및 유한차분법의 한계점 언급하고 제안모형을 통해 해결방안을 제공한 점이다. 네 번째는 복수의 기초 자산인 경우에 대한 해결 실마리를 제공했다는 점이다. 이 논문에서 제시한 접근 체계는 복수의 기초자산에 연계된 증권 가치평가에도 동일하게 적용이 될 것인데 단, 여기에 복수 확률변수에 대한 도달시간 계산 문제와 이러한 유형의 추가연계증권에서 나타나는 낙인시 기초자산중 최소 수익률(Worst Performer)에 연동된 수익률 결정 문제가 해결되어야 한다. 후자의 최소 수익률 문제는 비교적 용이하게 결정될 수 있지만, 전자의 다변량 도달시간 분포는 다른 분야에서도 관심이 높은 중요한 문제이지만 현재까지는 2변량에 대해서만 알려진 상황이다. 저자는 사실 이 다변량 도달시간 분포를 계산하는 방법을 발견한 상태이다. 이에 대한 내용은 본 논문의 범위를 넘어서므로 추후 다른 논문을 통하여 순차적으로 발표할 예정이다. 마지막으로 실무적 기여의 측면에서 본 논문에서 제시한 방법은 수치적 적분 기법 도입을 통하여 동 유형 상품의 가격 정확성을 제고하고 동시에 계산 시간을 단축시켰다는 점이다.

## V 참고문헌

- 임현철, 최영수 (2015), "ELS 발행 및 헤지에 따른 주식시장의 영향과 녹-인 효과 연구", 선물연구, 제23권, 제2호, pp. 289-321.
- Kim, Y., Bae, H. and Roh, H. (2011), "FDM Algorithm for Pricing of ELS with Exit-Probability", 선물연구, 제19권, 제4호, pp. 427-444.
- Black, F. and Cox, J. C. (1976), "Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions", Journal of Finance, Vol. 31, 351 - 367.
- Deng, G., Malletty, J. and McCann, C. (2011), "Modeling Autocallable Structured Products", Journal of Derivatives & Hedge Funds, Vol. 17 pp. 326-340.
- Genz, A. (1992), "Numerical computation of multivariate normal probabilities.", Journal of Computational and Graphical Statistics 1:141-150.
- Guillaume, T. (2015), "Analytical valuation of autocallable notes", International Journal of Financial Engineering, Vol. 02, No. 02.
- Hansson, F. (2012), "A pricing and performance study on auto-callable structured products", Stockholm KTH mimeo.
- He, H., P. W. Keirstead and J. Rebholz (1998), "Double Lookbacks," Mathematical Finance, Vol. 8, No. 3, pp. 201-228.
- Jang, G. H. (2020), "Korea's ELS Market: Current Status and Future Tasks", Capital Market Focus, Feb.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1998), Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer New York.
- Klebaner, F. C. (2012), Introduction To Stochastic Calculus With Applications, Imperial College Press.
- Kwok, Y. (2008), Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer.
- Lee, M. and Hong, J. (2021), "Semi closed-form pricing autocallable ELS using Brownian Bridge", Communications for Statistical Applications and Methods, Vol. 28, No. 3, 251-265.