

포트폴리오 분산투자: 한계점과 실증적 증거

엄철준(부산대학교 경영대학)

요 약

본 연구는 포트폴리오 분산투자효과를 통해 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성을 식별하고, 두꺼움의 변화패턴을 조사하였다. 검증결과에 의하면, 포트폴리오 분산투자에 있어서 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴은 공통요인에 기인하는 체계적 위험의 변화패턴을 보인다. 흥미로운 점은 포트폴리오 분산투자로부터 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 두꺼움은 감소패턴을 보이지만, 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움은 상승패턴을 보인다는 것이다. 즉, 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 비대칭적 변화패턴이다. 한편, 손실회피와 이익희생의 상충관계에서 보면, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 감소패턴은 극단적 이익실현의 기회 감소를 나타내고, 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 증가패턴은 극단적 손실실현의 효과감소를 나타낸다. 즉, 포트폴리오 분산투자에 의한 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계이다. 본 연구의 검증결과는 포트폴리오 분산투자효과가 갖는 실무적 한계점의 증거이고, 또한 시장붕괴 사건들에서 잘 분산 투자된 포트폴리오를 보유한 투자자들이 여전히 높은 손실을 경험하는 이유를 실증적으로 설명할 수 있는 증거이다. 아시아지역의 대표적인 중국, 일본, 한국, 그리고 대만 주식시장들 모두에서 동일한 검증결과를 확인했다.

Keywords: Portfolio diversification; Fat tails; Common factors; Principal components analysis; Random matrix theory; Singular value decomposition.

JEL classification: G11, C30.

I. 서 론

금융시장의 붕괴사건들은 현대 포트폴리오 이론의 실무 유용성에 대한 의심을 만든다. 아시아 금융위기(1997), 미국 신용위기(2008) 등 국제적 시장붕괴 사건들은 포트폴리오 선택이론에 따라 잘 분산 투자된 포트폴리오를 보유한 투자자들에게도 기대와 달리 높은 손실을 야기한다. 금융시장의 미래 불확실성에 대한 위험축소를 위한 중요한 투자수단으로 포트폴리오 분산투자를 이용한다. 포트폴리오 분산투자는 Markowitz (1999), Rubinstein (2002) 등이 언급하듯 Shakespeare의 베니스의 상인(The Merchant of Venice)에서 그 개념이 언급될 정도로 오랜 전부터 사용해온 위험축소의 수단이다. Evans and Archer (1968)는 포트폴리오를 구성하는 주식의 숫자를 단순히

증가시킴에 따라 포트폴리오 위험은 효과적으로 축소된다는 것을 보였다. 위험과 수익 관계에서 포트폴리오 분산투자를 이용한 투자자들은 극단적 손실의 가능성을 축소하기 위하여 이에 상응하는 극단적 이익의 가능성을 포기해야만 한다. 즉, 손실회피와 이익희생의 상충관계이다. 한편, 금융시계열자료에 대한 수익률분포는 두꺼운 꼬리를 갖는다는 것이 널리 알려져 있다(Mandelbrot, 1963; Fama, 1965). 수익률분포의 꼬리부분은 극단적 가격변화에 의한 수익률자료가 위치하는 곳으로 위험측정에 직접적으로 영향을 미친다. 그리고 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분이 미래 기대수익률의 변화를 설명할 수 있고, 더욱이 투자자들의 관심과도 높은 관계를 갖는다(Kelly and Jiang, 2014; Eom and Park, 2020). 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성이 기대수익률에 대한 결정요인이 되기 위해서는, 그 속성이 체계적 위험인지 아니면 비체계적 위험인지를 직접적 확인할 필요가 있다. 본 연구는 포트폴리오 분산투자를 통해 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분에 대한 위험속성을 실증적으로 조사하는 것이 목적이다.

금융시계열자료에서 빈번하게 관찰되는 실증적 현상들(stylized facts, Cont, 2001) 중에서 수익률분포의 두꺼운 꼬리가 대표적이다. Mandelbrot (1963), Fama (1965) 등은 주식수익률의 실증적 분포는 이론에서 가정하는 정규분포와 달리, 분포의 중심부분은 보다 높고 분포의 꼬리부분은 보다 두꺼운 특징을 갖는다는 것을 보였다. 이러한 분포적 특징을 Stable distribution을 이용하여 설명하였다. Mantegna and Stanley (1995)는 금융시계열자료의 가격자료를 수익률자료로 변환하는 시간축정간격(time-scale)의 변화에 따라 수익률분포는 상이한 특징을 갖는다는 것을 보였다. 즉, 고빈도자료(high frequency)에 대한 수익률분포는 매우 두꺼운 꼬리를 갖지만 저빈도자료(low frequency)에 대한 수익률분포는 미약한 두꺼운 꼬리의 특징을 보인다. Praetz (1972), Blattberg and Gonedes (1974) 등은 낮은 자유도에서 두꺼운 꼬리를 갖는 Student's t distribution가 수익률의 실증적 분포로부터 관찰되는 특징을 잘 설명할 수 있다는 것을 제안했고, Peiro (1994)는 주요 선진국들(미국, 일본, 독일 등)의 주식자료에 대한 수익률의 실증적 분포가 Student's t distribution의 속성에 근접한다는 것을 보였다. 하지만 이 분포는 좌우 대칭적 구조를 갖는 분포이기 때문에 비대칭적 구조에서의 두꺼운 꼬리속성을 갖는 실증적 분포를 설명하지 못한다. 결국, 금융시계열자료에 대한 수익률분포에 있어서 두꺼운 꼬리의 특징은 이론적 분포를 통해 충분히 설명되지 못한다. 이는 이론적 분포가 수익률분포의 모양 및 그 특징을 중요 모수를 통해 구현하지만, 주식시장의 거래활동을 통해 수익률자료에 포함된 경제적 속성을 반영하지 못하는 것에 기인할 수 있다. 따라서 수익률 분포의 꼬리부분에 대한 경제적 의미를 식별하는 연구의 필요성이 인정된다.

주식 수익률분포의 꼬리부분은 기대수익률에 대한 위험측정치로서 뿐만 아니라 행동재무모형(behavioral finance models)의 기대수익률에 대한 투자자 관심과도 높은 관련을 갖는다. 수익률 분포의 꼬리부분에 포함된 수익률자료들은 빈번하게 발생하는 가격변화 보다는 빈번하지 않은 극단적 가격변화에 해당한다. 즉, 시장붕괴 시기에 발생한 수익률자료들의 대부분은 수익률분포의 꼬리부분에 위치한다. 금융 분야에서 극단적 가격변화는 위험측정과정에서 중요하게 고려되는 부분이다. 예를 들어, 다운사이드 위험(downside risk)에 대한 Value-at-Risk (VaR)는 수익률자료에 대한 누적확률분포(cumulative distribution)에서 특정 비율(99%)을 벗어나는 극단적 손실의 영역에

위치하는 수익률자료의 통계적 확률을 이용하여 산출하는 위험측정치이다. 위험측정치의 관점에서 Kalley and Jiang (2014)는 Hill (1975)이 제안한 Hill estimator에 근거하여 수익률분포로부터 횡단면적으로 추정된 꼬리위험의 요인이 기대수익률의 변화를 유의적으로 설명한다는 것을 제안했다. Eom and Park (2020)은 Tversky and Kahneman (1992)의 투자자 대표성오류(representativeness bias)에 의한 전망이론(prospect theory)의 가치결정(Barberis, Mukherjee, and Wang, 2016)에 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분이 의미 있는 영향을 미친다는 증거를 제시하였다. 하지만, 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성이 체계적 위험과 비체계적 위험 중, 어느 속성을 갖는지를 실증적으로 조사한 연구는 찾기 어렵다. 포트폴리오 위험은 체계적 위험과 비체계적 위험으로 구성된다. 포트폴리오 분산투자를 통해 포트폴리오를 구성하는 개별주식들의 비체계적 위험은 대부분 제거되고 공통요인에 기인한 체계적 위험만이 남는다. 위험과 수익 관계에서 잘 분산 투자된 포트폴리오는 체계적 위험에 의한 기대수익률의 변화를 설명한다. 따라서 포트폴리오 분산투자효과의 검증방법은 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴을 관찰함으로써 꼬리부분에 포함된 위험속성을 식별할 수 있게 한다.

본 연구는 포트폴리오 분산투자에 의한 포트폴리오 위험감소에 있어서 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 극단적 가격변화의 영향력이 축소되는지 여부를 조사한다. 이는 포트폴리오 분산투자를 통해 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움 정도의 감소 여부를 확인함으로써 꼬리부분에 포함된 위험속성을 식별한다. 또한 수익률분포의 양(+) 꼬리부분과 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴을 함께 조사한다. 기존연구에서 본 연구의 검증내용을 조사한 사례를 찾기 어렵다. 따라 연구목적 을 위해 본 연구에서 고안한 주요 실증설계를 소개하면 다음과 같다.

첫째, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분과 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움 정도를 꼬리위험의 측정치로 채택한다. 수익률분포의 꼬리부분에 위치한 자료들은 빈번하게 발생하지 않는 극단적 가격변화에 해당한다. 위험은 불확실성의 척도로 기대수준의 평균값에서 벗어난 정도로 정의되기 때문에, 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움은 위험의 측정과정에 의미 있는 영향을 미친다. Eom, Kaizoji and Scalas (2019)은 수익률자료의 빈도분포에서 꼬리부분의 상대적 빈도(relative frequency)를 이용하여 양(+)/음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 정도를 측정하였다. 본 연구는 포트폴리오 분산투자를 통해 수익률분포의 양(+) 꼬리부분과 음(-) 꼬리부분의 두꺼움 변화를 관찰하는 것이 연구목적이기 때문에 꼬리부분에 대한 두꺼움(tail fatness, TF)을 위험측정치로 선택한다. TF 측정치가 꼬리 위험의 측정치 역할을 할 수 있는지 여부는 Hill (1975)의 Hill estimator(H)측정치와 Kelly and Jiang (2014)의 꼬리위험(tail risk, TR)측정치와의 관계를 통해 확인한다. 검증방법은 자유도의 조정을 통해 두꺼운 꼬리를 갖는 분포를 생성할 수 있는 Student's t distribution을 이용한 시뮬레이션이다.

둘째, 공통요인을 탐색하는 통계적 방법으로부터 추출된 고유치(eigenvalues)를 이용하여, 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성과 그 경제적 의미를 조사한다. 금융 분야에서, 수익률자료에 포함된 동질적 속성으로부터 공통요인을 추출하는 통계적 방법으로 주성분분석(principal components analysis, PCA)이 대표적이다. King (1966), Ross (1976) 등은 PCA을 이용하여 주식수익률로부터 추출한 높은 값을 갖는 고유치가 공통요인의 속성을 갖는다는 것을 확인하였고,

이들의 발견은 기대수익률에 대한 가격결정모형의 개발에 지대한 공헌을 한다. Eom, Jung, Kaizoji and Kim (2009)은 표본을 구성하는 주식의 숫자에 관계없이 가장 큰 고유치는 시장요인의 속성을 갖는다는 것을 보고하고, 포트폴리오를 구성하는 주식들로부터 추출한 가장 큰 값을 갖는 고유치를 시장요인의 대용변수로 이용한 Eom, Park, Kim and Kaizoji (2015), Eom and Park (2017), Eom (2017), Eom and Park (2018) 등의 연구가 있다. 즉, 높은 값을 갖는 고유치들은 공통요인의 경제적 의미를 갖는다. 따라서 본 연구는 고유치의 크기와 고유치 분포의 TF 추정치 간의 관계를 확인한다. 고유치 크기와 TF 추정치 간에 양(+)의 상관관계는 높은 값을 갖는 고유치일수록, 고유치 분포는 두꺼운 꼬리를 갖는 경향이 있다는 것을 의미한다. 높은 값을 갖는 고유치들은 공통요인의 경제적 속성을 갖기 때문에, 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분은 공통요인의 속성을 포함한다고 볼 수 있다. 검증결과의 강건성을 위해 Normal distribution, Student's t distribution, and Stable distribution의 3가지 이론적 분포들로부터 각각 생성된 난수자료를 이용하여 동일한 검증과정을 시뮬레이션을 한다. 이론적 분포는 수익률분포의 모양 및 그 특징을 중요 모수를 통해 구현할 수 있지만, 주식시장의 거래활동을 통해 실제 수익률자료에 포함된 경제적 속성을 포함하지 않기 때문에, 통계적으로 동일한 방법으로부터 추출된 고유치를 이용할지라도 분명한 다른 검증결과를 보일 것이다. Eom, et al. (2019)의 검증방법에 근거하여 개별주식수익률 자료로부터 이론적 분포들의 모수들을 직접 추정하고, 추정된 모수로부터 생성된 난수자료를 이용한다.

셋째, 공통요인의 속성을 통제한 수익률자료를 이용하여 수익률분포의 꼬리부분에 대한 공통요인의 역할을 직접적으로 검증한다. 수익률분포의 꼬리부분에 대한 위험속성이 공통요인에 의한 체계적 위험의 속성을 갖는다면, 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료로부터의 검증결과와 공통요인의 속성이 제거된 수익률자료로부터의 검증결과 간에는 분명한 차이를 보일 것이다. 본 연구는 고안한 방법을 이용하여, 주식수익률 자료로부터 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료와 공통요인의 속성이 없는 수익률자료의 2가지 종류를 생성한 후, 포트폴리오 분산투자 효과의 검증방법을 동일하게 적용한다. 고안한 방법은 Random Matrix Theory (RMT)와 Singular Value Decomposition (SVD)를 결합한 방법이다. RMT와 SVD는 PCA와 동일하게 특정 속성을 갖는 자료를 생성하기 위하여 동일하게 고유치와 고유벡터를 이용하는 방법이다. RMT는 주식수익률자료에 포함된 공통요인의 숫자를 결정하고, SVD는 결정된 공통요인의 숫자를 이용하여 공통요인의 속성 포함여부에 따라 2가지 유형의 수익률자료를 생성한다. 그리고 2가지 유형의 수익률자료를 이용하여, 포트폴리오 분산투자에 의한 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 추정치 변화를 확인한다.

넷째, 포트폴리오 분산투자를 통한 손실회피와 이익희생의 상충관계(trade-off relationship)를 검증한다. 투자자들이 포트폴리오 분산투자를 선택하는 이유는 미래 불확실성에 대한 극단적 손실 가능성을 축소하는 것이 주요 목적이고, 이러한 목적은 위험과 수익간의 관계에 따라 극단적 이익의 가능성을 희생시켜야만 한다. 그런데, 투자자가 잘 분산 투자된 포트폴리오를 보유함에도 불구하고, 국제적 시장붕괴 사건들은 투자자들에게 높은 손실을 야기한다. 즉, 포트폴리오 이론의 실무 유용성에 대한 의심을 만든다. 본 연구는 포트폴리오 분산투자를 통해 관찰된 수익률분포의 양(+)

과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 변화 패턴을 손실회피와 이익희생의 상충관계 관점에서 조사한다. 이를 위하여 손실회피와 이익희생의 상충관계를 계량화시키는 측정치를 고안한다. 즉, P/L ratio이다. 포트폴리오의 손실회피와 이익희생에 대한 비교기준은 포트폴리오를 구성하는 개별주식들이다. 개별주식 투자로부터 발생할 수 있는 극단적 손실은 포트폴리오 분산투자로부터 얻게 되는 손실회피의 효과에 해당하고, 개별주식 투자로부터 발생할 수 있는 극단적 이익은 포트폴리오 분산투자로부터 포기해야 하는 이익희생의 대가이다. 포트폴리오를 구성하는 개별주식의 극단적 손실크기와 포트폴리오의 극단적 손실크기를 비교한 손실회피비율(L -ratio)과 포트폴리오를 구성하는 개별주식의 극단적 이익크기와 포트폴리오의 극단적 이익크기를 비교하는 이익희생비율(P -ratio)을 측정하고, 그리고 이익희생비율을 손실회피비율로 나눈 Profit-Loss(P/L) ratio을 산출한다. 검증방법은 포트폴리오 분산투자에 의한 손실회피와 이익희생의 상충관계는 시계열적 시장 상황에 영향을 받을 수 있기 때문에, 기간이동방법(rolling-sample)에 의한 다양한 하위기간을 이용한다.

본 연구의 주요 검증결과를 요약하면 다음과 같다. 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 위험측정치로 채택한 TF 측정치는 Kelly and Jiang (2014)의 TR 측정치와 Hill (1975)의 HE 측정치에 대하여 높은 상관관계를 갖는다. 즉, 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TR 측정치는 꼬리위험의 측정치 역할을 한다. 포트폴리오 분산투자를 통한 TF 측정치의 변화패턴은 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성이 공통요인에 기인하는 체계적 위험의 속성을 갖는다는 것을 보여준다. 즉, 포트폴리오 분산투자를 통해 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분 특징은 제거되지 않는다. 흥미로운 발견은 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치 변화패턴이 비대칭적이라는 것이다. 즉, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 포트폴리오 구성주식 숫자가 증가함에 따라 감소패턴을 보이지만, 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 상승패턴을 보인다. 본 연구는 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분이 체계적 위험의 속성을 갖고, 포트폴리오 분산투자를 통한 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴이 비대칭적이라는 검증결과를 실증적으로 지지하는 증거를 제시한다. 먼저, 통계적 방법(PCA)으로부터 추출된 고유치를 이용하여 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성을 식별한 검증결과에 의하면, 높은 값을 갖는 고유치일수록 그 고유치 분포의 꼬리부분은 보다 두꺼운 경향이 있다. 주식수익률자료로부터 추출된 높은 값을 갖는 고유치들은 공통요인의 경제적 의미를 갖기 때문에, 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분에 위치한 자료들은 높은 값을 갖는 고유치의 공통요인 속성을 포함한다고 볼 수 있다. 한편, 이론적 분포로부터 생성된 난수자료를 이용한 검증결과는 고유치 크기와 고유치 분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치 간에 의미 있는 상관관계를 갖지 않는다. 즉, 개별주식수익률자료로부터 관찰된 고유치는 난수자료에서 확인할 수 없는 경제적 의미를 갖는다. 다음으로, RMT와 SVD를 결합한 검증방법으로부터 공통요인 속성의 포함여부에 따라 생성된 2가지 수익률자료를 이용한 검증결과는 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분 속성이 분명하게 공통요인 속성과 높은 관계를 갖는다는 것을 보인다. 즉, 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료를 이용한 경우, 포트폴리오 분산투자를 통해 이전 검증결과에서 확인된 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분이 체계적 위험의 속성을 갖고, 양(+)과 음(-)의 두꺼운 꼬리부분에 대한 변화패턴이 비대칭적이라는 것을 확인한다. 하지만, 공통요인의 속성이 없는 수익

를자료를 이용한 경우, 포트폴리오 분산투자를 통해 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분은 모두 감소패턴을 보이고, 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움 정도는 분명한 차이를 보이지 않는다. 한편, 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴이 비대칭적이라는 것은 포트폴리오 분산투자효과에 의한 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계를 의미한다. 본 연구에서 고안한 이익희생 대비 손실회피의 측정치를 이용한 검증결과는 개별주식 투자에 비교하여 포트폴리오 분산투자를 통해 투자자들이 기대하는 손실회피의 효과를 얻기 위해서는 보다 높은 이익희생의 대가를 지불하고 있다는 비대칭적 관계의 증거를 보인다. 이상의 검증결과는 포트폴리오 분산투자의 실무적 한계점을 실증적으로 입증하는 증거이다. 또한 투자자들이 잘 분산 투자된 포트폴리오를 보유한다 할지라도, 수익률분포의 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움을 충분히 축소하지 못하기 때문에, 시장붕괴의 사건들에 있어서 높은 손실을 겪는 이유를 실증적으로 설명하는 증거이다. 본 연구의 발견을 근거로 포트폴리오 분산투자효과의 실무적 한계점을 개선하는 향후 연구를 기대한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 다음 장엔 검증과정에 이용된 자료와 기간을 제시한다. 3장에서는 연구목적에 따라 검증된 검증결과를 구체적으로 언급한다. 마지막 장에서는 검증결과를 요약하고 결론을 제시한다.

II. 자료와 방법

본 연구는 아시아지역에서 대표적인 중국, 일본, 한국, 대만의 4개국 주식시장에서 거래되는 개별 주식자료를 이용한다. 각 국가별 주식자료로부터 관찰되는 검증결과를 비교함으로써 외표본(out-of-sample)에 의한 검증결과의 강건성(robustness)을 얻을 수 있다. 주식자료는 Compustat Global of Wharton Research Data Service로부터 추출하였다. 각 국가별 자료 및 기간은 다음과 같다. 첫째, 중국주식시장은 2001년 4월부터 2018년 6월까지의 기간(거래일수: 4,573)에서 거래된 3,814개 주식들 중에서 Shanghai exchange에서 거래되는 주식들의 가격정보를 이용하고, 둘째, 일본주식시장은 1986년 1월부터 2018년 6월까지의 기간(거래일수: 7,983)에서 거래된 5,581개 주식들 중에서 Tokyo exchange에서 거래되는 주식들의 가격정보를 이용하고, 셋째, 한국주식시장은 1986년 1월부터 2018년 6월까지의 기간(거래일수: 7,980)에서 거래된 2,977개 주식들 중에서 Korea exchange에서 거래되는 주식들의 가격정보를 이용하고, 넷째, 대만주식시장은 1993년 1월부터 2018년 6월까지의 기간(거래일수: 6,038)에서 거래된 2,314개 주식들 중에서 Gretai exchange에서 거래되는 주식들의 가격정보를 이용한다. 전체검증기간에서 연구목적에 따라 구분된 검증범위의 하위기간별로 모든 가격정보를 갖는 주식을 선택하여 분석과정에 이용한다. 특히 본 연구는 시장붕괴기간을 구분하기 위하여 2008년 9월의 미국 신용위기와 글로벌 금융위기의 기간을 전후로 3가지 종류의 하위기간에 대한 검증을 한다. 또한 동적 시장상황에 따른 검증결과의 시간가변성을 고려하기 위해 기간이동방법(Rolling-sample)에 의한 다양한 하위기간에 대한 검증도 한다.

다음으로, 본 연구는 통계적 방법을 이용한 주식수익률 분포의 꼬리부분에 대한 검증결과의 신뢰성을 얻기 위하여, 대표적인 3가지 이론적 분포로부터 생성된 난수자료를 함께 이용한다. 즉, 재

무이론에서 일반적으로 가정되는 normal distribution, 그리고 수익률자료의 실증적 분포 특징을 설명하는데 이용되는 Student's t distribution과 Stable distribution이다. 각 이론적 분포의 확률밀도함수와 중요 모수들을 소개하면 다음과 같다. Normal distribution에 대한 확률밀도함수($f(x|\mu, \sigma)$)이다.

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

식(1)의 확률밀도함수에 대한 모수는 수익률의 평균(μ)과 표준편차(σ)이다. Student's t distribution에 대한 확률밀도함수($f(x|v)$)는 식(2)와 같다 (Blatterberg and Gonedes, 1974).

$$f(x|v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{v})^{\frac{v+1}{2}}} \quad (2)$$

식에서 v 는 자유도를 나타내고, $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수(gamma function)이다. 마지막으로 Stable distribution의 확률밀도함수($f(\kappa|\alpha, \beta, \gamma, \delta)$)이다. 이 분포는 확률밀도함수에 대한 일반적 분포가 없지만, Ponta, Trinh, Raberto, Scalas, and Cincotti (2017), Nolan (2018) 등에 의한 특성함수(characteristic function)을 나타내면 식(3)과 같다.

$$\hat{f}(\kappa|\alpha, \beta, \gamma, \delta) = E[\exp(i\kappa X)] = \begin{cases} \exp(-\gamma|\kappa|^\alpha [1 + i\beta(\tan \frac{\pi\alpha}{2}(\text{sign } \kappa)((\gamma|\kappa|)^{1-\alpha} - 1)] + i\delta\kappa), & \alpha \neq 1 \\ \exp[-\gamma|\kappa|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign } \kappa)\ln(\gamma|\kappa|)] + i\delta\kappa] & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

식에서 α ($0 < \alpha \leq 2$)는 tail index 모수이고, β ($-1 \leq \beta \leq +1$)는 분포의 왜도(skewness) 모수이며, γ ($0 < \gamma < +\infty$)와 δ ($-\infty < \delta < +\infty$)는 각각 scale과 location 모수이다. 본 연구는 Eom et al. (2019)의 검증방법에 근거하여 3가지 이론적 분포로부터 난수자료를 생성한다. 즉, 4개국의 주식시장에서 거래되는 개별주식의 수익률자료로부터 이론적 분포의 모수를 추정하고,¹⁾ 추정된 모수를 이용하여 각 개별주식의 수익률자료에 대응하는 난수자료를 생성한다. 결국, 본 연구는 4개국 주식시장별 개별주식의 수익률자료와 동일한 구조를 갖는 이론적 분포의 난수자료를 검증과정에 함께 이용한다.

III. 실증결과

3.1. 수익률 분포의 두꺼운 꼬리에 대한 위험 측정치

본 절에서는 수익률분포의 양(+)과 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움을 측정하는 TF 측정치가 꼬리의 위험측정치로서 이용할 수 있다는 근거를 확인한다. 수익률분포의 꼬리부분에 위치하는 수익률 자료들은 빈번하게 발생하지 않는 극단적 가격변화에 해당하기 때문에, 위험속성을 갖는다. 또한,

1) 본 연구는 실제 개별주식의 수익률자료로부터 각 이론적 분포의 모수를 추정하기 위하여 Matlab의 statistical toolbox에 있는 *fitdist* m-함수를 이용한다.

수익률분포는 두꺼운 꼬리의 특징을 갖는 것으로 알려져 있다 (Mandelbrot, 1963; Fama, 1965; Mantegna and Stanley, 1995). Eom et al. (2019)는 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 정도를 상대빈도(relative frequency)를 이용하여 측정하였다. 표준화된 수익률자료(x_z)를 이용하여 수익률분포의 99% 중심부분을 벗어나는 양쪽 꼬리 0.5%의 영역($x_z \leq -2.58$ 혹은 $x_z \geq +2.58$)에 포함된 수익률자료를 각각 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 포함된 자료로 정의한다. 여기서 표준화된 수익률자료는 수익률에서 평균값을 빼고 수익률의 표준편차로 나눈 것이다. 상대 빈도는 양쪽 0.5% 꼬리부분에 포함된 자료숫자($f_x^{(-)}$, $f_x^{(+)}$)를 총 자료숫자(f_T)로 나눈 값이다. 즉,

$$\text{negative tail: } TF^{(-)} = \frac{f_x^{(-)}}{f_T}, \text{ where } f_x^{(-)} = f(x_z \leq -2.58) \quad (4)$$

$$\text{positive tail: } TF^{(+)} = \frac{f_x^{(+)}}{f_T}, \text{ where } f_x^{(+)} = f(x_z \geq +2.58) \quad (5)$$

식에서 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 상대적 빈도가 TF 측정치이다. TF 측정치가 위험측정치의 역할을 할 수 있는지 여부는 기존연구에서 알려진 꼬리부분 위험측정치와의 비교를 통해 확인한다. 본 연구는 Hill (1975)의 HE 측정치와 Kelly and Jiang (2014)의 TR 측정치를 이용한다. 먼저, Hill (1975, p.2846)에 의하여 제안된 HE 측정치($\hat{\alpha}_n$)는 다음과 같다.

$$P(X_i > x) = x^{-\alpha} L(x) \text{ for } x \geq 0$$

$$HE \equiv \hat{\alpha}_n = \left[\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{X_{(i)}}{X_{(k_n+1)}} \right) \right]^{-1}, \text{ where } X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(k_n+1)} \quad (6)$$

그리고 Kelly and Jiang (2014, p.1166)에 의하여 제안된 TR 측정치(α_t)는 다음과 같다.

$$TR \equiv \alpha_t = \frac{1}{K_t} \sum_{k=1}^{K_t} \ln \left(\frac{R_{k,t}}{u_t} \right) \quad (7)$$

여기서, x 과 u_t 는 임계치(critical values)로 TF 측정치와 동일한 기준으로 표준화된 자료에서 중심부분 99%의 경계치인 -2.58과 +2.58이다. X_i 와 R_k 는 임계치를 벗어난 극단치를 나타내고, k_n ($i = 1, 2, \dots, k_n$)과 K_t ($t = 1, 2, \dots, K_t$)는 임계치를 벗어나는 극단치의 총 숫자이다. Kelly and Jiang (2014)의 TR 측정치는 수익률분포의 꼬리부분이 두꺼울수록 높은 값을 갖고, Hill (1975)의 HE 측정치는 수익률분포의 꼬리부분이 두꺼울수록 작은 값을 갖는다. 본 연구에서 채택한 TF 측정치는 수익률분포의 꼬리부분이 두꺼울수록 높은 값을 갖는다. 따라서 3가지 측정치들 간의 예상되는 관계는 다음과 같다. TF 측정치와 TR 측정치 간에는 양(+)의 상관관계, TF 측정치와 HE 측정치 간에는 음(-)의 상관관계, 그리고 TR 측정치와 HE 측정치 간에는 음(-)의 상관관계를 예상한다. 검증결과는 Figure 1에 제시한다. 검증과정에 Student's t distribution의 특징을 갖는 난수자료(random data)를 이용한다. 분포의 모수인 자유도는 3~53 범위에서 0.5씩 증가시킨다. 이 분포의 모수인 자유도는 작은 값을 가질수록 분포는 두꺼운 꼬리를 갖고, 반대로 자유도가 큰 값을

가질수록 분포는 얇은 꼬리를 가지며 정규분포에 근접한다. 강건성을 위해 충분한 자료 숫자 (100,000개)를 갖는 난수자료를 각 자유도별로 100번 반복 생성하고, 각각을 검증과정에 이용한다. 검증결과는 3가지 꼬리위험 측정치로 구분 제시한다. 즉, 양(+)의 꼬리부분과 음(-)의 꼬리부분에 있어서 *TF*측정치는 Figure 1(a) and 1(d)에, *TR*측정치는 Figure 1(b) and 1(e)에, 그리고 *HE*측정치는 Figure 1(c) and 1(f)에 제시한다.²⁾ 그림에서 X축은 자유도를 나타내고, Y축은 각 자유도별로 반복 측정된 100개의 검증결과에 대한 평균값이다.

[Figure 1, insert here]

검증결과에 의하면, *TF*측정치는 수익률분포의 꼬리부분에 대한 위험측정치로 이용할 수 있다. 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 관계없이, *TF*측정치는 자유도가 작을 때 높은 값을 갖고, 자유도가 클 때 낮은 값을 갖는다. Kelly and Jiang (2014)의 *TR*측정치는 자유도가 작을 때 높은 값을 갖고, 자유도가 클 때 낮은 값을 갖는다. 반면에, Hill (1975)의 *HE*측정치는 자유도가 작을 때 작은 값을 갖고, 자유도가 클 때 큰 값을 갖는다. 즉, *TF*측정치에 대한 *TR*측정치와 *HE*측정치 각각의 상관관계는 예상에 일치한다. *TF*측정치에 대한 *TR*측정치와 *HE*측정치 각각의 상관관계는 양(+)/음(-) 꼬리부분에 대해 86.98%/80.33%과 -96.79%/-96.37%이다. 물론, *TR*측정치와 *HE*측정치 간의 상관관계는 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대해 각각 -84.19%와 -82.19%이다. 따라서 본 연구는 수익률분포의 양(+) 꼬리부분과 음(-) 꼬리부분 각각에 대한 두꺼움의 위험측정치로 *TF*측정치를 이용하여 설정된 연구목적에 실증적으로 조사한다.

3.2. 포트폴리오 분산투자 효과

본 절에서는 포트폴리오 분산투자를 통한 포트폴리오 위험과 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴을 조사한 검증결과를 제시한다. 포트폴리오 분산투자효과는 포트폴리오를 구성하는 주식의 숫자가 증가함에 따라 포트폴리오 위험(표준편차)이 현저히 감소하는 현상이다. 포트폴리오 위험은 공통요인에 관련된 체계적 위험과 개별주식에 관련된 비체계적 위험으로 구성되며, 포트폴리오 분산투자를 통해 감소하는 위험은 비체계적 위험이다. 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 포함된 수익률자료는 극단적 이익에 해당하고, 음(-) 꼬리부분에 포함된 수익률자료는 극단적 손실에 해당한다. 결국, 포트폴리오 위험은 수익률분포의 꼬리부분에 위치하는 극단값과 그 빈도(자료 숫자)에 직접적으로 영향을 받는다. 따라서 포트폴리오 분산투자효과를 통한 포트폴리오 위험의 감소패턴에서 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 극단적 이익/손실의 영향력이 축소되는지 여부를 *TF*측정치의 변화패턴을 통해 확인한다. 검증방법은 포트폴리오 분산투자효과를 실증적으로 조사한 Evans and Archer (1968)에 둔다. 즉, 포트폴리오 구성주식 숫자는 2개~50개의 범위로 설정하고, 각 구성주식 숫자에서 무작위 선택된 주식들로 구성된 포트폴리오를 이용하여 포트폴리오 수

2) Student t-distribution의 특징은 두꺼운 꼬리부분과 양(+)과 음(-)의 대칭구조이다. 본 연구는 분포의 특징을 갖는 난수자료를 생성하여 이용하기 때문에, 이론에서 규정된 양(+)/음(-) 꼬리부분의 대칭적 구조를 정확하게 갖지 않는다. 따라서 검증결과의 신뢰성을 위해, Figure 1은 양(+)/음(-) 꼬리부분 모두에 대한 검증결과를 제시한다.

익률의 표준편차와 수익률분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치를 측정한다.³⁾ 검증결과는 각 구성주식 숫자별로 100번의 반복실험을 통해 산출한 표준편차와 TF 측정치의 평균값이다. 검증결과는 Figure 2에 제시한다. 그림에서, X축은 포트폴리오 구성주식의 숫자이다. 위쪽 그림의 Y축은 포트폴리오 수익률의 표준편차를 나타내고, 아래쪽 그림의 Y축은 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치이다. 그림은 아시아지역의 대표적인 4개국 주식시장으로 구분 제시한다. 즉, Figure 2(a)는 중국주식시장(2001.07~2018.06), Figure 2(b)는 일본주식시장(2000.07~2018.06), Figure 2(c)는 한국주식시장(2000.07~2018.06), 그리고 Figure 2(d)는 대만주식시장(2000.07~2018.06)에 대한 검증결과이다.

[Figure 2, insert here]

검증결과에 의하면, 4개국의 주식시장에 관계없이, 알려진 포트폴리오 분산투자효과를 확인할 수 있다. 즉, 포트폴리오 구성주식의 숫자가 증가함에 따라 포트폴리오 수익률의 표준편차는 분명하게 감소하는 패턴을 보이고, 구성주식 숫자가 20개 주변에서 분명한 감소패턴은 사라지며, 일정 수준의 수평적 패턴 (flat pattern)을 보인다. 한편, 포트폴리오 수익률분포의 양(+)과 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 상이한 패턴을 보인다. 포트폴리오 구성주식의 숫자가 증가함에 따라 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 분명한 감소패턴을 보이고, 일정수준의 구성주식 숫자(20개) 주변으로 수평적 패턴을 보인다. 반면에, 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 포트폴리오의 구성주식 숫자가 증가함에 따라 증가패턴(increasing pattern)을 보이고, 일정수준의 구성주식 숫자(20개) 주변에서 수평적 패턴을 보인다. 따라서 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치가 양(+) 꼬리부분에 대한 TF 측정치가 보다 크다. 4개국 주식시장으로부터 동일한 검증결과를 확인한다면, 이는 외표본에 의한 검증결과의 견고성을 갖는다.

Figure 2의 검증결과는 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움은 포트폴리오 분산투자를 통해 제거되지 않는다는 것을 제시한다. 이는 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성은 공통요인에 기인하는 체계적 위험의 속성에 가깝다. 흥미로운 발견은 포트폴리오 수익률분포의 양(+)과 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 비대칭적 패턴을 보인다는 것이다. 즉, 포트폴리오 분산투자를 통해 투자자들은 포트폴리오 수익률의 위험(표준편차)을 감소시키지만, 그 감소는 수익률분포의 음(-)의 꼬리부분 보다는 양(+)의 꼬리부분에 기인한다. 한편, 수익률분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치가 높은/낮은 값을 갖는다는 것은 꼬리부분에 극단적 이익과 손실의 빈도가 많다/작다는 것을 의미한다. 따라서 포트폴리오 분산투자에서 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 낮은 TF 측정치는 꼬리부분에 포함된 극단적 이익의 빈도가 감소한다는 것이지만, 대조적으로 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 높은 TF 측정치는 꼬리부분에 포함된 극단적 손실의 빈도가 높은 수준을 유지한다는 것이다. 즉, 손실회피와 이익희생의 비대칭적 상충관계이다. 본 연구는 언급된 2가지 관찰점을 입증할 수 있는 실증적 증거를 다음 절에서 제시한다. 즉, 첫째, 포트폴리오 수

3) Elton and Gruber (1977)는 포트폴리오 분산투자를 통해 비체계적 위험이 현저하게 사라지는 구성주식의 숫자를 10개~20개로 언급했고, Statman (1987)은 무위험이자율에 의한 차입/대출의 조건을 포함하면, 포트폴리오 분산투자를 통해 비체계적 위험이 현저하게 사라지는 구성주식의 숫자를 30~40개로 언급한다. 따라서 본 연구는 포트폴리오 구성주식의 숫자 범위를 2~50개로 설정하고, 분명한 감소패턴이 사라지는 주식숫자를 20개 주변으로 설정한다.

익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성은 공통요인에 기인한 체계적 위험의 속성이고, 둘째, 포트폴리오 분산투자를 통한 위험감소효과는 음(-) 꼬리부분의 손실회피와 양(+) 꼬리부분의 이익희생에 대한 비대칭적 관계에 기인한다.

3.3. 두꺼운 꼬리의 위험 속성: 통계적 접근

본 절에서는 수익률분포의 꼬리부분에 포함된 위험속성이 공통요인에 기인한 체계적 위험인지 여부를 통계적 방법으로부터 추출된 고유치를 이용하여 조사한 검증결과를 제시한다. 즉, 고유치의 크기와 고유치 분포의 두꺼운 꼬리 간의 관계를 확인한다. 기존연구에서 높은 값을 갖는 고유치는 주식수익률 자료에 포함된 동질적 속성을 갖는 공통요인의 경제적 의미를 갖고, 이는 가격결정모형에서 기대수익률 변화를 설명할 수 있는 결정요인으로 이용된다(King, 1966; Ross, 1976; Brown, 1989, Eom et al., 2009). 고유치의 크기가 고유치 분포의 꼬리부분에 대한 두꺼움(TF측정치)과 양(+)의 상관관계를 갖는다면, 이 관계는 경제적 관점에서 공통요인의 속성을 갖는 높은 값의 고유치일수록 고유치 분포의 꼬리부분은 보다 두꺼워진다는 경향을 나타낸다. 또한, 주식수익률 분포의 두꺼운 꼬리부분은 높은 값을 갖는 고유치들의 속성이 포함되어 있다고 볼 수 있기 때문에, 수익률분포의 꼬리부분 속성은 공통요인과 관련된다고 해석할 수 있다. 검증방법은 PCA를 이용하여 N 개의 주식수익률 자료(R_j , $j = 1, 2, \dots, N$)로부터 K 개의 고유치(E_k , $k = 1, 2, \dots, K$)를 추출한다. 통계적으로 추출할 수 있는 고유치 숫자는 개별주식의 숫자와 동일하다. 즉, $N \equiv K$. 각 고유치별 시계열자료는 다음의 식으로 산출한다.

$$R_{E(k),t} = \sum_{j=1}^N V_{k,j} R_{j,t} \quad (8)$$

식에서 $V_{k,j}$ 는 주식 j 에 대한 k 번째 고유치의 고유벡터이다. 본 연구는 K 개의 고유치 (E_k)와 각 고유치의 시계열자료($R_{E(k),t}$) 분포의 꼬리부분에 대한 TF측정치 간의 관계를 확인한다. 검증결과를 Table 1에 제시한다. 표는 4개국 주식시장의 검증결과를 구분 제시한다. 즉, Panel A의 중국, Panel B의 일본, Panel C의 한국, 그리고 Panel D의 대만이다. 각 국가별로 주식수익률 자료를 이용한 검증결과와 이론적 분포의 난수자료를 이용한 검증결과를 함께 제시한다. 각 국가별 검증기간은 전체기간(P1)과 2008년 미국 신용위기 등의 일련의 글로벌 금융위기의 사건들이 발생한 기간(2007.07~2011.06)을 전후로 구분된 3가지 하위기간(P2, P3, P4)으로 구성된다.⁴⁾ 그리고 기존연구에 알려져 있듯이, 가장 큰 값을 갖는 고유치는 두 번째로 큰 값을 갖는 고유치의 크기에 비교하여 매우 큰 차이를 보인다. 이는 가장 큰 고유치의 포함여부가 검증결과에 의미 있는 영향을 미칠 수 있다는 것을 나타낸다. 따라서 표는 가장 큰 고유치를 포함한 경우의 검증결과와 가장 큰

4) 일본주식시장의 경우는 전체기간(2000.07~2018.06)에 대한 검증결과만 제시한다. 본 연구에서 채택한 PCA방법은 안정적인 공분산행렬(혹은 상관관계행렬)을 이용한 고유치의 산출과정에 개별주식의 숫자(N)보다 각 개별주식의 시계열자료 숫자(T)가 보다 많아야만 한다. 즉, $N < T$. 하지만, 일본주식시장의 경우는 분석대상 개별주식의 숫자가 3가지 하위기간에서 기간길이보다 많기 때문에 안정적인 공분산행렬을 산출할 수 없고, 이로 인하여 고유치의 산출이 어렵다.

고유치를 제외한 나머지 고유치에 대한 검증결과로 구분 제시한다.

[Table 1, insert here]

검증결과에 의하면, 각국의 주식시장에 관계없이, 고유치 크기와 고유치 분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 높은 양(+)의 상관관계를 보인다. 즉, 높은 값을 갖는 고유치일수록 그 고유치 분포의 꼬리부분은 두꺼운 경향을 보인다. 또한 가장 큰 고유치를 제외한 경우의 검증결과는 모든 주식시장에 있어서 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 관계없이, 보다 높은 양(+)의 상관관계를 보인다. 이는 Figure 3에서 시각적으로 분명하게 확인한다. 그림은 일본주식시장에서 거래되는 개별주식의 수익률자료로부터 추출된 고유치와 고유치 분포에 대한 TF 측정치 간의 관계를 산포도를 이용하여 나타낸 것이다. X축은 고유치를 나타내고, Y축은 TF 측정치를 나타낸다.

[Figure 3, insert here]

그림에 의하면, 고유치 크기와 고유치 분포의 TF 측정치는 시각적으로 분명한 양(+)의 관계를 갖는다. 결론적으로, 높은 값을 갖는 고유치일수록 그 고유치 분포의 꼬리부분은 보다 두꺼운 경향이 있다. 이는 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분에 위치한 자료들의 속성은 높은 값을 갖는 고유치들에 포함된 동일한 속성을 포함한다는 것을 의미한다. 따라서 높은 값을 갖는 고유치들은 공통요인의 경제적 의미를 갖기 때문에, 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분에 위치한 자료들의 속성은 높은 값을 갖는 고유치들이 갖는 공통요인의 경제적 의미를 가질 수 있다는 것을 제안한다.

한편, 본 연구는 경제적 의미를 갖지 않는 난수자료로부터 추출된 고유치로부터도 동일한 관계를 확인할 수 있는지 여부를 조사한다. 만약, 동일한 양(+)의 상관관계를 확인한다면, 개별주식의 수익률자료로부터 추출된 고유치를 이용한 검증결과와 그 경제적 의미를 신뢰하기 어렵다. 왜냐하면 난수자료엔 주식시장의 거래활동으로부터 포함된 경제적 의미가 없기 때문이다. 하지만, 만약, 난수자료를 이용한 검증결과에서 의미 있는 관계를 확인할 수 없다면, 이는 주식수익률자료로부터 관찰된 고유치와 고유치 분포의 TF 측정치 간의 관계에 대한 검증결과와 그 경제적 의미의 해석을 지지하는 증거이다. 검증방법은 Chapter 2에서 소개한 대표적인 3가지 이론적 분포(normal distribution, Student t-distribution, stable alpha distribution)로부터 생성된 난수자료를 이용한다. 즉, 개별주식의 수익률자료별로 직접 추정된 분포의 모수를 이용하여 동일한 시계열 길이를 갖는 난수자료를 생성한다. 따라서 개별주식수익률의 자료구조와 난수자료의 구조는 동일하다. 그리고 난수자료를 이용하여 PCA방법으로부터 추출된 고유치와 고유치 분포의 TF 측정치 간의 상관관계는 Table 1에 제시하였다. 검증결과에 의하면, 이론적 분포를 따르는 난수자료를 이용한 검증결과는 대부분 음(-)의 값을 갖거나 매우 작은 상관관계 값을 갖는다. 이는 Figure 4에서 시각적으로 분명하게 확인한다. 그림은 일본주식시장에서 거래된 개별주식수익률과 3가지 이론적 분포의 난수자료로부터 추출된 고유치와 고유치 분포에 대한 TF 측정치 간의 관계를 산포도를 이용하여 나타낸다. 그림에서, Figure 4(a)는 음(-)의 꼬리부분에 대한 검증결과이고, Figure 4(b)는 양(+)의 꼬리부분에 대한 검증결과이다.

[Figure 4, insert here]

그림에 의하면, 개별주식수익률자료를 이용한 검증결과와 이론적 분포의 난수자료를 이용한 검증결과 간에 상이함으로 보여준다. 이론적 분포의 난수자료로부터 추출된 고유치는 비록 개별주식수익률자료로부터 추출된 고유치와 같이 큰 값을 갖는다 할지라도, 해당 고유치의 속성을 갖는 시계열자료의 분포는 두꺼운 꼬리를 갖지 않는다. 결론적으로, 개별주식수익률자료로부터 관찰된 고유치와 고유치 분포의 TF 측정치 간의 양(+)의 관계는 난수자료에서 확인할 수 없는 경제적 의미를 갖는 검증결과임을 알 수 있다.

3.4. 두꺼운 꼬리의 위험속성: 공통요인

본 절에서는 공통요인의 속성 포함여부에 따라 구분된 2가지 수익률자료를 이용하여 포트폴리오 분산투자효과로부터 관찰된 수익률분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 변화를 재조사한다. 즉, 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료와 공통요인의 속성이 없는 수익률자료의 2가지 종류의 수익률자료를 이용하여 동일한 포트폴리오 분산투자효과의 검증방법을 적용한다. 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분이 공통요인의 속성에 관련된다면 다음의 관찰이 예상된다. 첫째, 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료를 이용한 경우, Figure 2에서 관찰된 검증결과와 일치하는 수익률분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 변화패턴을 확인할 것이다. 또한 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치가 양(+) 꼬리부분 보다 큰 값을 가질 것으로 예상된다. 둘째, 공통요인의 속성이 없는 수익률자료를 이용한 경우, 관찰된 이전 검증결과와 다른 수익률분포의 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 변화패턴을 관찰할 것이고, 특히 수익률분포의 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 양(+)의 꼬리부분 보다 민감한 변화가 예상된다.

본 연구는 공통요인에 따른 2가지 유형의 수익률자료를 생성하기 위하여 RMT와 SVD를 결합한 방법을 고안한다. RMT와 SVD는 PCA와 동일하게 고유치와 고유벡터를 이용하여 특정 속성만을 갖는 자료를 생성하는 방법들이다. 검증과정에서 RMT는 주식수익률자료에 포함된 공통요인의 숫자를 결정하는 역할이고, SVD는 RMT로부터 결정된 공통요인의 숫자를 입력변수로 이용하여 공통요인의 속성만을 갖는 수익률의 시계열자료와 공통요인의 속성이 제거된 수익률의 시계열자료 각각을 생성한다. 본 연구에서 채택한 RMT와 SVD의 주요내용을 소개하면 다음과 같다. RMT에 있어서, Sengupta and Mitra (1999)에 따르면, 주식수익률의 상관관계행렬에 대한 고유치(λ) 분포에서 주식의 숫자가 증가 ($N \rightarrow \infty$)하고 시계열자료의 길이가 길어짐($T \rightarrow \infty$)에 따라, 무작위 상관행렬에서 고유치의 확률밀도함수, $P_{RM}(\lambda)$ 는 다음과 같다 (Plerou et al., 2002).

$$P_{RM}(\lambda) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+^{RM} - \lambda)(\lambda - \lambda_-^{RM})}}{\lambda}, \quad (\lambda_{\pm}^{RM} = 1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}}), \quad \text{in here, } Q = \frac{T}{N} \quad (9)$$

식에서 무작위 상관행렬을 결정하는 고유치들은 $\lambda_+^{RM} \geq \lambda \geq \lambda_-^{RM}$ 의 범위에 속한다. 무작위 상관행렬 범위의 최대고유치(λ_+^{RM}) 보다 큰 값을 갖는 고유치들이 개별주식의 수익률변화를 설명할 수 있는 공통요인의 경제적 의미를 갖는다. 따라서 무작위 상관행렬 범위의 최대고유치(λ_+^{RM})와 가장 큰

값을 갖는 고유치(λ^{MAX}) 사이의 범위 ($\lambda^{MAX} \geq \lambda > \lambda_+^{RM}$)에 속하는 L 개의 고유치를 공통요인 숫자로 식별한다. 다음으로, SVD는 RMT에서 식별된 L 개의 공통요인 숫자를 입력변수로 이용하여 실제 주식수익률 자료로부터 공통요인의 속성을 갖는 수익률자료와 공통요인의 속성이 제거된 수익률자료를 생성한다. 기존연구에서 SVD를 이용하여 $T \times N$ 수익률자료의 A -행렬을 3가지 행렬로 분해한다 (Kleibergen and Paap, 2006).

$$A = U \cdot S \cdot V^{(')} \quad (10)$$

식에서, 개별주식의 수익률자료에 대한 시계열자료 길이(T)와 개별주식 숫자(N)의 주어진 조건 ($T > N$)에서, U -행렬은 $T \times N$ 직교행렬($U^{(')}U \equiv I_T$)이고, S -행렬은 대각선을 제외한 모든 요소가 0의 값을 갖는 $N \times N$ 대각선행렬이며, 그리고 $V^{(')}$ 는 전치행렬을 나타내며, V -행렬은 $N \times N$ 직교행렬 ($V^{(')}V \equiv I_N$)이다. 개별주식 ($j=1,2,\dots,M$)의 시계열자료($t=1,2,\dots,T$)에 대한 선형결합 형식으로 달리 표현하면 다음과 같다.

$$a_{j,t} = \sum_{k=1}^K u_{t,k} s_k v_{j,k} \quad (11)$$

즉, M 개 개별주식의 T 길이를 갖는 시계열 수익률자료로부터 추출 가능한 요인의 숫자 ($k=1,2,\dots,K(M)$)에 있어서, RMT방법으로부터 식별된 L 개의 공통요인 숫자를 적용하여 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료($C_{j,t}$, $T \times M$)와 공통요인의 속성이 제거된 수익률자료($F_{j,t}$, $T \times M$)의 2가지 시계열 자료를 분해 생성한다.

$$C_{j,t} = \sum_{k=1}^L u_{t,k} s_k v_{j,k} \quad (12)$$

$$F_{j,t} = \sum_{k=L+1}^K u_{t,k} s_k v_{j,k} \quad (13)$$

검증결과는 식(12)로부터 생성된 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료를 이용한 포트폴리오 분산투자효과에 의한 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치 변화패턴은 **Figure 5**에 제시하고, 식(13)으로부터 생성된 공통요인의 속성이 제거된 수익률자료를 이용한 포트폴리오 분산투자효과에 의한 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측정치 변화패턴은 **Figure 6**에 구분 제시한다. 검증과정은 **Figure 2**와 동일하게 2개~50개의 범위에 있는 포트폴리오 구성주식 숫자를 이용한다. 구성주식 숫자별로 무작위 추출과정을 통해 선택된 주식들로 구성된 포트폴리오에 대한 포트폴리오 분산투자효과를 100번 반복 검증하고, 그 평균값을 그림에 표시한다. 각각의 검증결과를 구체적으로 살펴본다.

[Figure 5, insert here]

먼저, 공통요인의 속성만을 갖는 수익률자료를 이용한 **Figure 5**의 검증결과를 살펴본다. 검증결과에 의하면, 포트폴리오의 구성주식 숫자가 증가함에 따라 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 TF 측

정치는 일정하게 수평 변화패턴을 보인다. 즉, **Figure 2**에서 관찰된 검증결과에 일치한다. 더욱이 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치가 양(+) 꼬리부분 보다 큰 값을 갖는다. 차이점은 매우 작은 포트폴리오 구성주식의 숫자에서부터 TF 측정치의 수평 패턴을 보인다는 것이다. 따라서 **Figure 5**는 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분 속성은 공통요인의 속성과 높은 관계를 갖는다는 검증가설을 지지하는 증거이다. 4개국 주식시장에 있어서, 일본주식시장에 대한 TF 측정치가 가장 작은 값을 보이고, 중국주식시장에 대한 TF 측정치가 가장 큰 값을 보인다. 일반적으로 알려진 주식시장의 성숙정도에 근거하면, 신흥시장으로 분류되는 중국주식시장에서 시장요인과 같은 공통요인의 큰 변화가 성숙한 일본주식시장에 비교하여 빈번하다는 것을 의미한다.

[Figure 6, insert here]

다음으로, 공통요인의 속성이 제거된 수익률자료를 이용한 **Figure 6**의 검증결과를 살펴본다. 검증결과에 의하면, 포트폴리오의 구성주식 숫자가 증가함에 따라 포트폴리오 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 앞에서 확인된 **Figure 2**의 검증결과와 분명하게 다른 변화패턴을 보인다. 즉, 포트폴리오 구성주식의 숫자가 증가함에 따라, 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치는 양(+) 꼬리부분의 TF 측정치 보다 작은 값을 갖는다. 이는 공통요인의 속성을 제거한 수익률자료를 이용하기 때문에 포트폴리오 분산투자효과에서 비체계적 위험의 감소패턴과 유사한 패턴을 보인 것이다. 따라서 **Figure 6**은 역시 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분 속성은 공통요인의 속성과 높은 관계를 갖는다는 검증가설을 지지하는 증거이다.

이상의 검증결과에 근거하면, 포트폴리오 분산투자에 따라 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분은 공통요인 속성과 높은 관계를 갖고, 더욱이 공통요인의 속성은 수익률분포의 양(+) 꼬리부분 보다 음(-) 꼬리부분에 더욱 높은 관계를 갖는다. 포트폴리오 분산투자의 위험감소효과 관점에서 보면, 포트폴리오 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 두꺼움(TF 측정치)의 감소패턴이 포트폴리오 위험(표준편차)의 감소효과에 기여하지만, 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 증가패턴은 포트폴리오 위험(표준편차)의 감소효과에 기여한다고 보기 어렵다. 한편, 손실회피와 이익희생의 상충관계에서 보면, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 감소패턴은 극단적 이익실현의 기회가 감소한다는 의미이지만, 음(-) 꼬리부분에 대한 TF 측정치의 증가패턴은 극단적 손실실현의 기회가 감소하지 않는다는 의미이다. 즉, 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계이다. 따라서 투자자들은 포트폴리오 분산투자를 통해 극단적 손실실현을 축소시키는 것이 주요 목적이지만, 실제로 손실회피의 효과보다 이익희생의 대가가 더욱 크다. 결국, 이는 전통적 포트폴리오 분산투자 효과가 갖는 실무적 한계점의 증거이고, 또한 시장붕괴 사건들에서 포트폴리오 분산투자를 통해 여전히 높은 손실을 겪게 되는 이유를 설명할 수 있는 증거가 될 수 있다.

3.5. 포트폴리오 분산투자의 한계점: 실증적 증거

본 절에서는 포트폴리오 분산투자에 의한 손실회피와 이익희생 간의 비대칭적 관계에 대한 실증적 증거를 조사한다. 손실회피와 이익희생은 포트폴리오 분산투자를 통해 투자자가 기대하는 극단

적 손실실현의 가능성에 대한 축소효과와 이에 상응하는 극단적 이익실현의 가능성에 대한 축소효과를 의미한다. 포트폴리오 분산투자로부터 손실회피와 이익희생의 상충관계를 검증하기 위한 비교 기준은 포트폴리오를 구성하는 개별주식들로부터 실현할 수 있는 극단적 손실과 극단적 이익을 이용한다. 즉, 개별주식으로부터 발생할 수 있는 극단적 손실은 포트폴리오 분산투자로부터 얻게 되는 손실회피의 효과이고, 개별주식으로부터 발생할 수 있는 극단적 이익은 포트폴리오 분산투자로부터 포기해야만 하는 이익희생의 대가이다. 본 연구는 손실회피와 이익희생 간의 상충관계를 계량적으로 관찰하기 위해 Profit-Loss (P/L) ratio를 고안한다. 즉,

$$P/L = \frac{PR}{LR} \quad (14)$$

$$\text{where, } LR = \frac{A_L - P_L}{A_L} \text{ and } PR = \frac{A_P - P_P}{A_P}$$

식에서, P/L 은 이익희생에 대한 PR 측정치를 손실회피에 대한 LR 측정치로 나눈 값이다. LR 측정치는 개별주식 투자에 비교하여 포트폴리오 투자를 통해 축소한 손실회피의 정도를 나타내고, PR 측정치는 개별주식 투자에 비교하여 포트폴리오 투자를 통해 축소한 이익희생의 정도를 나타낸다. 따라서 손실회피의 LR 측정치에서, A_L 은 포트폴리오를 구성하는 주식들의 손실들 중에서 극단적 손실을, P_L 은 포트폴리오의 극단적 손실이다. 이익희생의 PR 측정치에 있어서, A_P 는 포트폴리오를 구성하는 주식들의 이익들 중에서 극단적 이익을, P_P 는 포트폴리오의 극단적 이익을 나타낸다. 극단적 손실은 최소값과 백분율(percentile)의 5%에 해당하는 값으로 하고, 극단적 이익은 최대값과 백분율의 95%에 해당하는 값을 이용한다. 고안된 P/L ratio로부터 평가방향은 다음과 같다. 첫째, $P/L > 1$ 의 경우는 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계를 나타내며, 이는 보다 높은 이익희생에 기인한 포트폴리오 분산투자효과이고, 둘째, $P/L < 1$ 의 경우는 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계이지만, 이는 보다 높은 손실회피에 기인한 포트폴리오 분산투자효과를 나타낸다. $P/L = 1$ 인 경우는 손실회피와 이익희생의 대칭적 관계를 나타낸다. 포트폴리오 분산투자로부터 투자자들의 기대는 이익희생이 높은 $P/L > 1$ 경우보다는 손실회피가 높은 $P/L < 1$ 경우를 보다 선호한다.

검증결과는 Table 2와 Figure 7에 제시한다. 손실회피와 이익희생의 상충관계는 포트폴리오 투자성장에 관련되기 때문에 기간이동방법(rolling-sample)을 이용하여 다양한 하위기간에서 관찰된 검증결과를 보고한다. 검증방법의 주요내용은 다음과 같다. 포트폴리오의 구성주식 숫자는 50개로 고정한다. 전체 검증기간에 있어서, 포트폴리오를 구성하는 기간은 60개월이고, 기간이동은 12개월로 한다. 기간이동방법에 따라 중국주식시장은 13개 하위기간을, 일본주식시장은 19개 하위기간을, 한국주식시장은 18개 하위기간, 그리고 대만주식시장은 9개 하위기간을 갖는다. 각 하위기간별로 동일한 검증과정으로 포트폴리오 분산투자효과를 검증한다. 즉, 무작위로 선택된 50개 개별주식으로 구성된 포트폴리오에 대한 100번 반복 실험을 한다. Table 2는 전체기간에서 기간이동방법에 의해 각 하위기간에서 관찰된 검증결과의 평균값을 보고하고, Figure 7은 모든 하위기간 검증결과의 분포를 box-plot방법으로 제시한다.

[Table 2, insert here]

[Figure 7, insert here]

검증결과에 의하면, 개별주식 투자에 비교하여 포트폴리오 분산투자를 통한 손실회피와 이익희생의 상충관계는 손실회피 보다 이익희생이 보다 높다. 극단적 이익과 극단적 손실을 최대값과 최소값 기준으로 비교하면, 포트폴리오 분산투자를 통한 P/L ratio는 2.23배~4.42배의 범위에 있다. 비정상적인 극단적 이익과 손실의 영향을 통제하기 위하여, 백분율의 95%와 5%에 해당하는 값을 기준으로 비교하면, 포트폴리오 분산투자를 통한 P/L ratio는 0.84배~1.71배의 범위에 있다. 즉, 포트폴리오 분산투자를 통해 투자자들이 기대하는 손실회피의 효과를 얻기 위해서는 보다 높은 이익희생의 대가를 지불해야만 한다. 4개국의 P/L ratio에서, 가장 낮은 배수는 일본주식시장이고, 가장 높은 배수는 대만주식시장이다. 이상의 검증결과를 통해, 본 연구는 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계를 실질적으로 입증하는 증거를 제시한다. 즉, 검증결과는 포트폴리오 분산투자의 실무적 한계점을 실증적으로 입증하는 증거이다. 또한, 투자자들이 잘 분산 투자된 포트폴리오를 구성한다 할지라도, 수익률분포의 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움을 충분히 축소하지 못하기 때문에, 시장 붕괴의 사건들에 있어서 기대와 달리 높은 손실을 겪는 원인을 실증적으로 설명하는 증거이다.

IV. 결 론

본 연구는 아시아지역에서 대표적인 중국, 일본, 한국, 대만의 4개국 주식시장에서 거래되는 개별 주식자료를 이용하여, 포트폴리오 분산투자를 통해 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분에 대한 위험속성을 식별하고, 양(+) 꼬리부분과 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴을 함께 조사했다. 설정된 연구목적에 대한 주요 실증설계를 소개하면 다음과 같다. 첫째, 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 정도를 위험측정치로 채택하고, 둘째, 포트폴리오 분산투자를 통한 포트폴리오 위험축소 효과와 함께 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 두꺼움의 변화패턴을 조사하며, 셋째, 고안한 통계적 방법의 결합 검증과정을 통해 수익률분포의 두꺼운 꼬리부분에 포함된 위험속성을 식별하고, 넷째, 수익률분포의 양(+)과 음(-)의 꼬리부분에 대한 극단적 이익과 손실의 상충관계를 실증적으로 조사할 수 있도록 검증방법을 설계했다. 주요 검증결과는 다음과 같다. 포트폴리오 분산투자에 따라 포트폴리오 수익률분포의 꼬리부분은 공통요인 속성과 높은 관계를 갖고, 공통요인으로부터의 영향은 수익률분포의 양(+) 꼬리부분 보다 음(-) 꼬리부분에 보다 높다. 포트폴리오 분산투자에 의한 위험감소 효과에서, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 감소패턴이 포트폴리오 위험의 감소효과에 기여하지만, 수익률분포의 음(-) 꼬리부분에 대한 두꺼움의 증가패턴은 포트폴리오 위험의 감소효과에 기여한다고 보기 어렵다. 한편, 포트폴리오 분산투자로부터 손실회피와 이익희생의 비대칭적 관계를 확인한다. 즉, 수익률분포의 양(+) 꼬리부분에 대한 TF측정치의 감소패턴은 극단적 이익실현의 기회 감소를 나타내고, 음(-) 꼬리부분에 대한 TF측정치의 증가패턴은 극단적 손실실현의 감소효과가 작다는 것이다. 따라서 투자자들은 포트폴리오 분산투자를 통해 극단적 손실실현을 축소시키는 것이 주요 목적이지만, 실제로 손실회피의 효과보다 이익희생의 대가가 더욱 크다. 결국, 본 연구의 검증결과는 포트폴리오 분산투자효과

가 갖는 실무적 한계점의 증거이고, 또한 시장붕괴 사건들에서 포트폴리오 분산투자를 통해 여전히 높은 손실을 겪는 원인을 실증적으로 제시한다. 이상의 검증결과를 통해, 본 연구는 전통적 포트폴리오 분산투자효과는 투자자들이 누릴 수 있는 공짜 점심이라는 것을 실증적으로 부정하는 증거를 제시하였고, 이는 포트폴리오 분산투자의 실무적 한계점을 극복하는 방법 모색의 미래 연구의 주제에 기여하는 바가 인정된다.

참고문헌

Barberis, N., A. Mukherjee, and B. Wang, (2016), "Prospect theory and stock returns: An empirical test," *Review of Financial Studies*, 29(11), 3068-3107.

Blattberg, R. and N. Gonedes, (1974), "A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices," *Journal of Business*, 47, 244-280.

Brown, S. T., (1989), "The number of factors in security returns," *Journal of Finance*, 44(5), 1247-1262.

Cont, R., (2001), "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues," *Quantitative Finance*, 1, 223-236.

Elton, E. J, and M. J. Gruber (1977), "Risk reduction and portfolio size: an analytical solution" *Journal of Business*, 50(4), 415-437.

Eom, C., (2017), "Two-faced property of a market factor in asset pricing and diversification effect," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471, 190-199.

Eom, C., W. Jung, T. Kaizoji and S. Kim, (2009), "Effect of changing data size on eigenvalues in the Korean and Japanese stock markets," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(22), 4780-4786.

Eom, C., T. Kaizoji, and E. Scalas, (2019), "Fat tails in financial return distributions revisited: Evidence from the Korean stock market," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 526, 121055.

Eom, C., and J. W. Park (2020), "Effects of the fat-tail distribution of the relationship between prospect theory value and expected return," *North American Journal of Economics and Finance*, forthcoming: <https://doi.org/10.1016/j.najef.2019.101052>.

Eom, C., and J. W. Park, (2017), "Effects of common factors on stock correlation networks and portfolio diversification," *International Review of Financial Analysis*, 49, 1-11.

Eom, C., and J. W. Park, (2018), "A new method for better portfolio investment: A case of the Korean stock market," *Pacific-Basin Finance Journal* 49, 213-231.

Eom, C., J. W. Park, Y. H. Kim, and T. Kaizoji, (2015), "Effects of the market factor on portfolio diversification: The case of market crashes," *Investment Analysts Journal*, 44(1), 71-83.

Evans, J. L. and S. H. Archer, (1968), "Diversification and the reduction of dispersion: An empirical analysis," *Journal of Finance*, 23(5), 761-767.

Fama, E., (1965), "The behavior of stock market prices," *Journal of Business*, 38, 34-105.

Hill, B. M., (1975), "A simple general approach to inference about the tail of a distribution," *Annals of Statistics*, 3(5), 1163-1174.

Kelly, B., and H. Jiang, (2014), "Trail risk and asset prices," *Review of Financial Studies*, 27(10), 2841-2871.

King, B., (1966), "Market and industry factors in stock price behavior," *Journal of Business*, 39(1), 139-190.

Kleibergen, F., and R. Paap (2006), "Generalized reduced rank tests using the singular value decomposition" *Journal of Econometrics* 133, 97-126.

Mandelbrot, B. B., (1963), "The variation of certain speculative prices," *Journal of Business*, 36, 394-419.

Mantegna, R. N., and H. E. Stanley, (1995) "Scaling behaviour in the dynamics of and economic index," *Nature*, 376(6), 46-49.

Markowitz, H., (1991), "Foundations of portfolio theory", *Les Prix Nobel 1990*, 292 (Nobel Foundation, Stockholm).

Nolan, J. P., (2018), "Stable distributions: Models for heavy tailed data," *working paper* available in website, <http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/chap1.pdf>.

Plerou, V., P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, T. Guhr, and H. E. Stanley (2002), "Random matrix approach to cross correlations in financial data" *Physical Review E* 65 066126.

Peiro, A., (1994), "The distribution of stock returns: International evidence," *Applied Financial Economics*, 4, 431-439.

Ponta, L., M. Trinh, M. Raberto, E. Scalas, and S. Cincotti, (2017), "Modeling non-stationarities in high-frequency financial time series," *working paper* available in website, <https://arxiv.org/abs/1212.0479>.

Praetz, P. D., (1972), "The distribution of share price changes," *Journal of Business*, 45(1), 49-55.

Ross, S., (1976), "The arbitrage theory of capital asset pricing," *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360.

Rubinstein, M., (2002), "Markowitz's "portfolio selection": A fifty-year retrospective" *Journal of Finance*, 57(3), 1041-1045.

Sengupta, A. M., and P. P. Mitra (1999), "Distributions of singular values for some random matrices" *Physical Review E* 60, 3389.

Statman, M., (1987), "How many stocks make a diversified portfolio?" *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(3), 353-363.

Tversky, A., and D. Kahneman, (1992), "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty* 5, 297-323.

Figure 1. Risk measures on the tails of the Student's t distribution

The figures show the changes of risk measures according to increasing the degree of freedom (DoF) in Student's t distribution. The risk measures consist of tail fatness (TF; a, d), tail risk (TR; b, e) suggested by Kelly and Jiang (2014) and Hill estimator (HE; c, f) suggested by Hill (1975). The positive and negative tails in the distribution are divided into upper (a, b, c) and lower (d, e, f) figures, respectively. The results are average values of 100 risk measures repeatedly calculated using random data with a data number of 100,000 following Student's t distribution with each DoF within the range of 3 to 53 in 0.5 increments. The X-axis indicates DoF, and the Y-axis indicates values of risk measures.

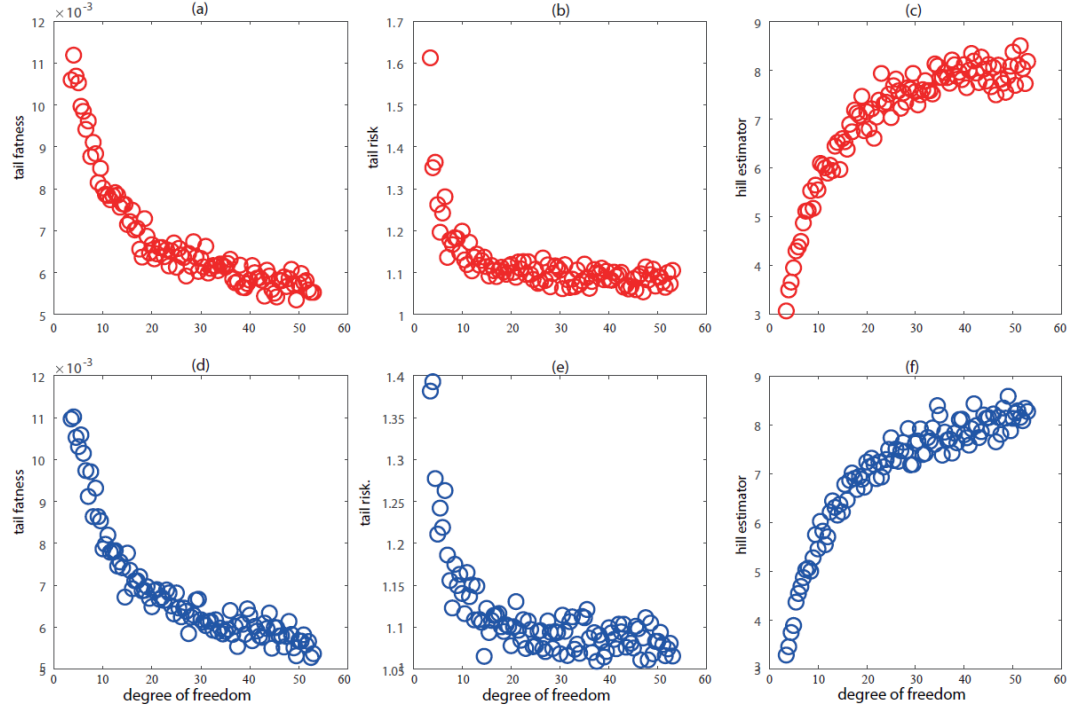


Figure 2. Portfolio diversification effect by portfolio risk and tail fatness (TF) in the return distribution

The figures show the portfolio diversification effect according to increasing number of stocks in a portfolio from the perspectives of the portfolio risk (upper figures) and tail fatness (TF) in the portfolio return distribution (lower figures), respectively. Portfolio risk is measured by the standard deviation of returns. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The results consist of four countries: China (a), Japan (b), Korea (c), and Taiwan (d). The X-axis indicates the number of stocks in a portfolio within the range of 2 to 50, and the Y-axis presents the average values of portfolio risk and the TF measures calculated from 100 iterated simulations for each portfolio constructed by randomly selected stocks in each stock market under a condition of sampling without replacement. The vertical line is located in the portfolio comprised of 20 stocks based on Elton and Gruber (1975).

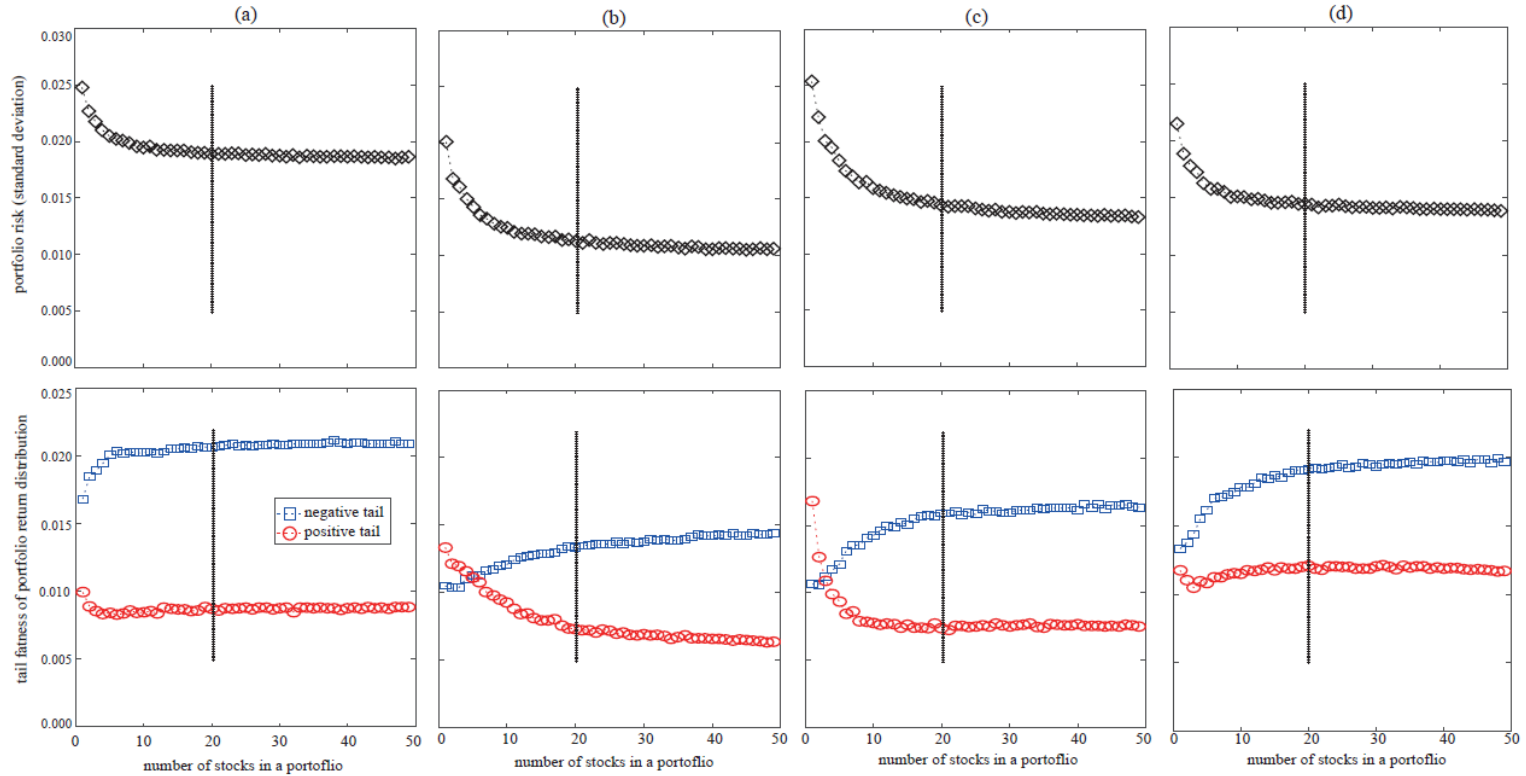


Table 1. Relationship between the eigenvalues' magnitude and tail fatness (TF) in the eigenvalue distribution

The table shows the results on the relationship between the magnitude of eigenvalues and the tail fatness (TF) in the distribution using an eigenvalue time series. The relationship is quantified by correlation coefficient. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. Eigenvalue and its time series data are generated from principal components analysis (PCA) using stock returns traded in each stock market of China (Panel A), Japan (Panel B), Korea (Panel C) and Taiwan (Panel D) for each sub-period (P1, P2, P3, and P4). Three-type random data from three theoretical distributions, the Normal distribution, Student's t distribution, and the Stable distribution, are generated using key parameters that are directly estimated from each stock traded in the stock markets of four countries over the whole periods (P1). The results are separately presented for negative and positive tails using all eigenvalues with and without the largest eigenvalue, respectively.

	# of stocks / duration	Negative tail		Positive tail	
		With 1 st Eigenvalue	Without 1 st Eigenvalue	With 1 st Eigenvalue	Without 1 st Eigenvalue
Panel A: the Chinese stock market					
► stock returns					
P1: 2001.07~2018.06	491 / 4,185	0.2996	0.5271	0.0401	0.5737
P2: 2001.07~2007.06	504 / 1,506	0.0944	0.4442	0.0739	0.5144
P3: 2007.07~2011.06	720 / 976	0.2586	0.4290	0.0228	0.4407
P4: 2011.07~2018.06	760 / 1,703	0.2016	0.5335	0.0815	0.6085
► random data using parameters estimated from stock returns					
Normal distribution	P1	0.0325	0.0354	0.0093	0.0133
Student' t distribution	P1	-0.1394	-0.1468	-0.1430	-0.1311
Stable distribution	P1	-0.2225	-0.2279	-0.2237	-0.2380
Panel B: the Japanese stock market					
► stock returns					
P1: 2000.07~2018.06	2,051 / 4,409	0.1899	0.5434	0.1141	0.6206
P2: 2000.07~2007.06	2,358 / 1,715	-	-	-	-
P3: 2007.07~2011.06	2,929 / 977	-	-	-	-
P4: 2011.07~2018.06	2,811 / 1,717	-	-	-	-
► random data using parameters estimated from stock returns					
Normal distribution	P1	0.0118	0.0036	-0.0118	-0.0047
Student' t distribution	P1	-0.0607	-0.0890	-0.0605	-0.0890
Stable distribution	P1	-0.2125	-0.2213	-0.2110	-0.2204
Panel C: the Korean stock market					
► stock returns					
P1: 2000.07~2018.06	416 / 4,440	0.3944	0.3233	0.0922	0.3926
P2: 2000.07~2007.06	492 / 1,719	0.3263	0.3954	0.1277	0.4795
P3: 2007.07~2011.06	622 / 999	0.2956	0.3727	0.1759	0.4209
P4: 2011.07~2018.06	717 / 1,722	0.3863	0.4316	0.2332	0.5589
► random data using parameters estimated from stock returns					
Normal distribution	P1	0.0341	0.0022	0.0539	0.0426
Student' t distribution	P1	-0.2987	-0.3474	-0.3001	-0.3612
Stable distribution	P1	-0.2632	-0.2684	-0.2694	-0.2731
Panel D: the Taiwanese stock market					
► stock returns					
P1: 2000.07~2018.06	276 / 4,288	0.4044	-0.0205	0.1187	-0.0223
P2: 2000.07~2007.06	285 / 1,674	0.2189	0.1554	0.1614	0.2281
P3: 2007.07~2011.06	668 / 962	0.2818	0.3762	0.0547	0.2610
P4: 2011.07~2018.06	729 / 1,652	0.2789	0.3089	0.1026	0.3474
► random data using parameters estimated from stock returns					
Normal distribution	P1	0.0025	0.0010	0.0518	0.0490
Student' t distribution	P1	-0.2257	-0.3636	-0.2327	-0.4094
Stable distribution	P1	-0.2268	-0.2814	-0.2329	-0.2928

Figure 3. Relationship between eigenvalues and tail fatness (TF) in the eigenvalue distribution: Japan

The figures show the results for the relationship between the magnitude of eigenvalues and the tail fatness (TF) in the distribution using an eigenvalue time series generated by principle components analysis (PCA) using 2,051 stocks traded in the Japanese stock market over the period from July 2000 to June 2018. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. In the scatter-plot, the X-axis indicates the magnitude of the eigenvalues and the Y-axis denotes the TF measures on the positive and negative tails of the eigenvalue distribution. Figures 3(a) and 3(b) show the negative tail; Figures 3(c) and 3(d) show the positive tail. In addition, to control for the influence of the largest eigenvalue (\star) on the results, Figures 3(a) and 3(c) show the results for the case in which the largest eigenvalue is included, using a double-log plot; Figures 3(b) and 3(d) show the results for the case in which the largest eigenvalue is excluded.

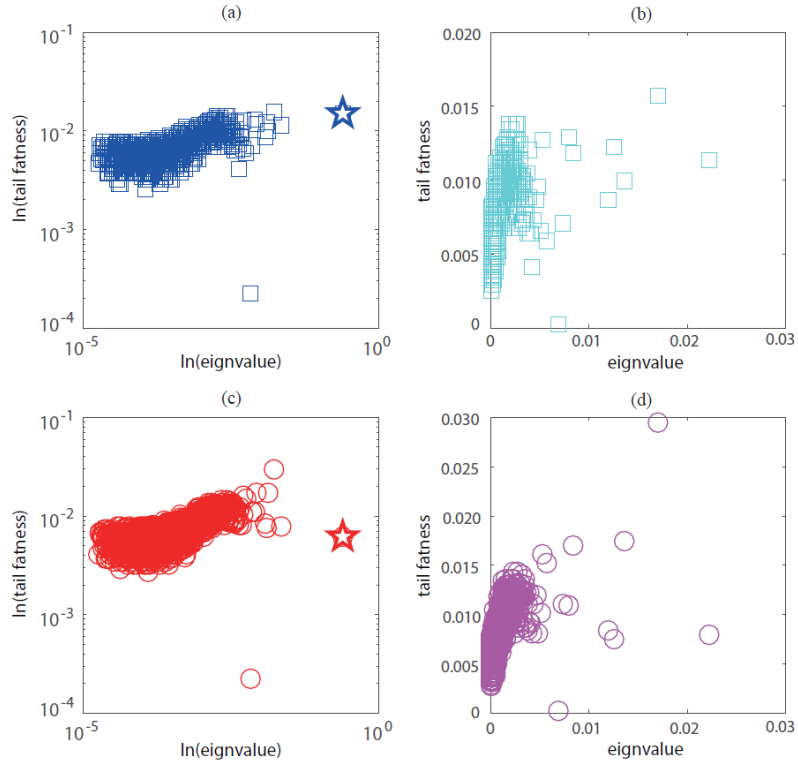


Figure 4. Relationship between eigenvalues and tail fatness (TF) in the eigenvalue distribution: Random data

The figures show the results for the relationship between the magnitude of eigenvalues and the tail fatness (TF) in the distribution using an eigenvalue time series generated by principle components analysis (PCA) using each of the stock returns and theoretical random data. Stock data is for 2,051 stocks traded in the Japanese stock market over the period from July 2000 to June 2018. Three-type random data from three theoretical distributions, the Normal distribution, Student's t distribution, and the Stable distribution, are generated using key parameters that are directly estimated from each stock traded in the Japanese stock market over the same period. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The results are divided into the negative tail part (a) and positive tail part (b). The X-axis indicates eigenvalues that are standardized by subtracting the average value and dividing the standard deviation, and the Y-axis indicates the TF measures on the positive and negative tails of the eigenvalue distribution. The markers indicate stock returns (★), random data from the Normal distribution (○), Student's t distribution (▽) and the Stable distribution (□), and the filled markers indicate the largest eigenvalue.

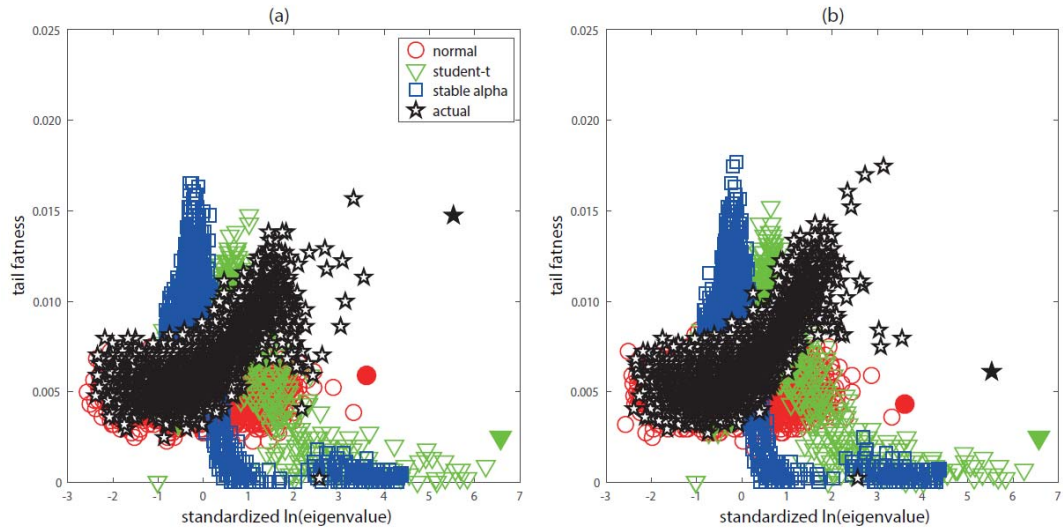


Figure 5. Portfolio diversification by tail fatness (TF) from return data with common factors' properties

The figures show the results for the portfolio diversification effect according to increasing the number of stocks in a portfolio from the perspective of the tail fatness (TF) measured from the distribution using return data with the properties of common factors. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The results are divided using the two types of return data, i.e., original return data (\square , \circ in Figure 2), and controlled return data (\blacksquare , \bullet) having the properties of the common factors. The negative (\square , \blacksquare) and positive (\circ , \bullet) tails in the portfolio return distribution are separately presented. The figures are separately presented for the results of four countries, China (a), Japan (b), Korea (c), and Taiwan (d), using all stocks over the whole period. The X-axis denotes the number of stocks in the portfolio from 2 to 50 and the Y-axis indicates the average values of the TF measures calculated from 100 simulations in each portfolio. The vertical line is located in the portfolio comprised of 20 stocks based on Elton and Gruber (1975).

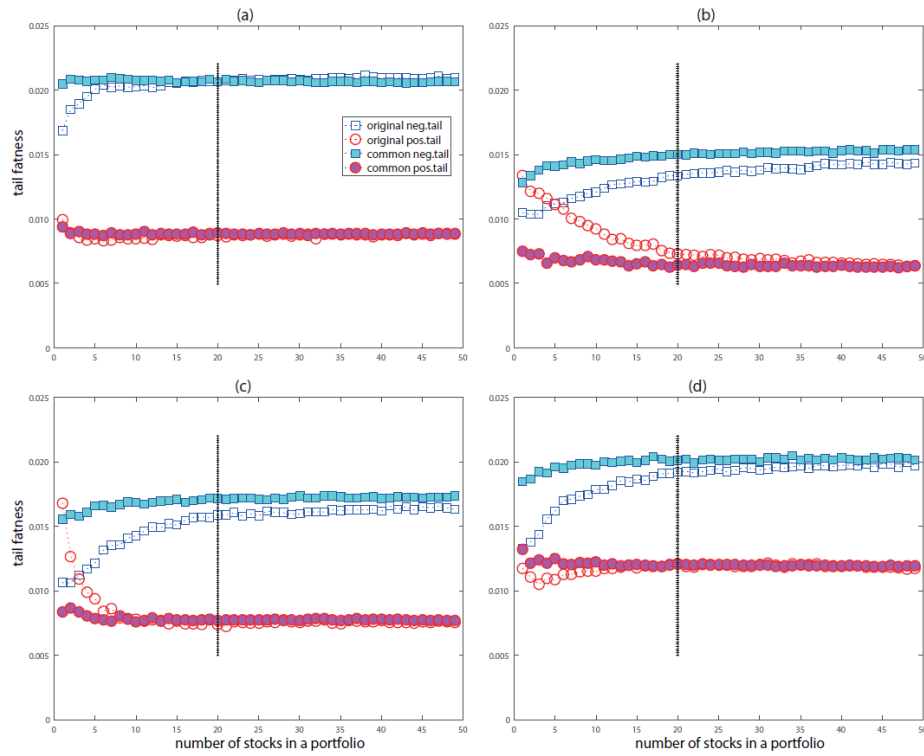


Figure 6. Portfolio diversification by tail fatness (TF) from return data without common factors' properties

The figures show the results for the portfolio diversification effect according to increasing the number of stocks in a portfolio from the perspective of the tail fatness (TF) measured from the distribution using return data without the properties of common factors. The tail fatness is quantified by the TF measures on positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The results are divided using the two types of return data, i.e., original return data (\square, \circ in Figure 2), and controlled return data (\blacksquare, \bullet) without the properties of the common factors. The negative (\square, \blacksquare) and positive (\circ, \bullet) tails in the portfolio return distribution are separately presented. The figures are separately presented for the results of four countries, China (a), Japan (b), Korea (c), and Taiwan (d), using all stocks over the whole period. The X-axis denotes the number of stocks in the portfolio from 2 to 50 and the Y-axis indicates the average values of the TF measures calculated from 100 simulations in each portfolio. The vertical line is located in the portfolio comprised of 20 stocks based on Elton and Gruber (1975).

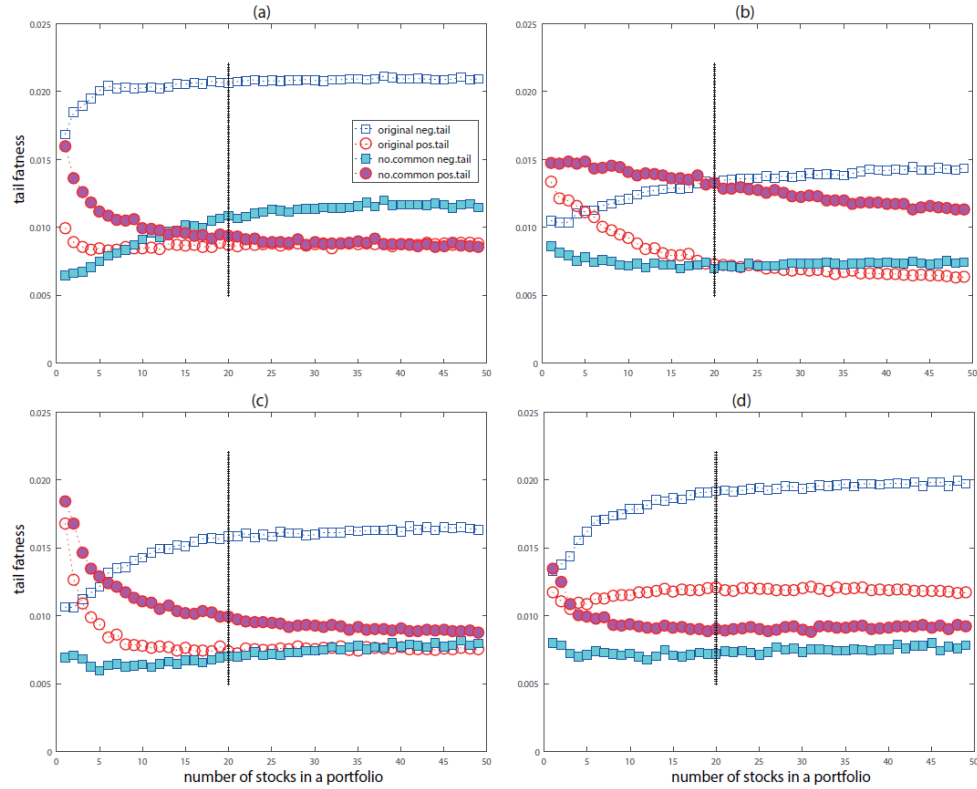


Table 2. Comparison on profit/loss (P/L) ratio in the portfolio and stocks

The table presents the results for tail fatness (TF) and the P/L ratio for four countries, China (Panel A), Japan (Panel B), Korea (Panel C), and Taiwan (Panel D), using all stocks over the whole period. TF is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The P/L ratio is calculated by dividing the PR measure for profit sacrifice by the LR measure for loss avoidance. Compared to investing in stocks that comprise a portfolio, the LR measure indicates the ratio of high losses reduced by investment in the portfolio, and the PR measure represents the ratio of high profits sacrificed from investment in the portfolio. The results are separately reported for the TF measures on the positive and negative tails in the return distribution of portfolio (P) and stock (S) returns, for the difference S-P between the TF measures of stock and portfolio distribution, and for the P/L ratio based on maximum and minimum (max/min) values and values located in the 95% and 5% percentiles (95%/5%). Values in parentheses are t-statistics.

TF: portfolio, P		TF: stock, S		TF difference S-P		P/L ratio	
negative	positive	negative	positive	negative	positive	max/min	95%/5%
Panel A: the Chinese stock market							
0.020193	0.007476	0.014537	0.015431	-0.005655	0.007956	2.4590	1.1544
(12.74)	(12.32)	(14.26)	(21.32)	(-5.03)	(12.09)	(10.82)	(12.47)
Panel B: the Japanese stock market							
0.013930	0.007333	0.009928	0.015004	-0.004002	0.007671	2.2343	0.8389
(15.04)	(12.47)	(52.68)	(36.36)	(-4.53)	(12.62)	(12.62)	(11.37)
Panel C: the Korean stock market							
0.016399	0.007635	0.009367	0.017672	-0.007032	0.010036	3.5696	1.4064
(29.26)	(15.14)	(26.16)	(47.69)	(-17.90)	(4.43)	(18.17)	(15.08)
Panel D: the Taiwanese stock market							
0.017100	0.009129	0.008790	0.012544	-0.008311	0.003416	4.4288	1.7144
(14.72)	(15.17)	(14.84)	(11.78)	(-9.65)	(2.24)	(9.71)	(17.41)

Figure 7. Comparison on the distribution of the profit/loss (P/L) ratio in the portfolio and stocks

The figures show the results for the distribution of tail fatness (TF) in stock and portfolio return distributions and the P/L ratio through the box-plot method using stock data traded in the Japanese stock market over the period from July 2000 to June 2018. The tail fatness is quantified by the TF measures on the positive and negative tails of the return distribution. Tails are defined as the area beyond the 99% central part of the distribution. The P/L ratio is calculated by dividing the PR measure for profit sacrifice by the LR measure for loss avoidance. Compared to investment on stocks that comprise a portfolio, the LR measure indicates the ratio of high losses reduced from investment in the portfolio, and the PR measure represents the ratio of high profits sacrificed from investment in the portfolio. The results are separately presented for the TF measure (a) and the P/L ratio (b). In Figure (a), the X-axis denotes the negative and positive tails for each portfolio and stock, and the Y-axis indicates the distribution of the TF measures for all sub-periods. In Figure (b), the X-axis denotes two-type comparative basis value of maximum and minimum (max/min) and 95% and 5% percentiles (95%/5%), and the Y-axis indicates the distribution of the P/L ratios for all sub-periods.

